Fortsetzung
des
Versuchs
in
socratischen Gesprächen
über die
wichtigsten Gegenstände
der
ebenen Geometrie

von
Johann Andreas Christian Michelsen
Professor am Berlinischen Gymnasium.

Berlin
bey Siegismund Friedrich Hesse
in der breiten Strasse
1782.

Fortsetzung
des
Versuchs
in
socratischen Gesprächen
über die
wichtigsten Gegenstände
der
ebenen Geometrie

von
Johann Andreas Christian Michelsen
Professor am Berlinischen Gymnasium.

Berlin
bey Siegismund Friedrich Hesse
in der breiten Strasse
1782.

Den

Hochwürdigen und Hochgelahrten

Herrn

Johann Joachim

Spalding

Königl. Preuß. Oberconsistorialrath und
Probst in Berlin,

Herrn

D. Anton Friedrich

Büsching

Königl. Preuß. Oberconsistorialrath und
Director des vereinigten Berlinischen
und Cöllnischen Gymnasiums,

Herrn

D. Wilhelm Abraham

Teller

Königl. Preuß. Oberconsistorialrath und
Probst in Cölln.

mit der

Solchen Männern

schuldigen Ehrerbietung

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorrede.

Ich bin zur Fortsetzung des in der Leipziger Ostermesse herausgegebenen Versuchs in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie, so wohl öffentlich als privatim, häufiger und stärker ermuntert worden, als ich es bey meiner Vorstellung von der Unvollkommenheit desselben vermuthete und vermuthen konnte. Mit wahrem Vergnügen habe ich mich daher dieser Fortsetzung unterzogen, und ich ergreife die gegenwärtige Gelegenheit, mich der Schuldig-

keit des Danks für den Beyfall zu entledigen, der mir diese Arbeit so angenehm gemacht hat. — Noch habe ich mich, weder über meine Absicht so wohl bey jenem Versuche als dieser Fortsetzung desselben, noch über den Gebrauch erklärt, den ich davon theils selbst mache, theils von andern gemacht zu sehen wünsche. Es sey mir erlaubt dies jetzt mit ein Paar Worten zu thun, und dann zugleich von der Beschaffenheit dessen zu reden, was ich ähnliches über die Geometrie ferner herauszugeben vielleicht mich entschliesse.

Eigentlich und zunächst ist mein Vorsatz gewesen, für Kinder höchstens von acht bis zehn Jahren zu schreiben, und denselben Gelegenheit zur eigenen Wiederholung dessen, was ihnen ein Freund oder ein Lehrer von den allerersten Gegenständen der Geometrie mündlich gesagt, zu verschaffen. — Ist es nicht zu früh mit so jungen Kindern schon Geometrie treiben zu wollen? und ist, mündlichen Unterricht vorausgesetzt, die gedachte Gelegenheit nicht überflüssig? Ich glaube beyde

Fragen

Fragen mit Recht verneinen zu können. Vor etwa neun Jahren habe ich ein Kind, das erst sein sechstes Jahr zurückgelegt hatte, in der Geometrie zu unterweisen angefangen, und die Lust, die dasselbe stets zu dieser Wissenschaft gehabt, die Aufmerksamkeit, mit der es alles betrachtet und überlegt, und der Fortgang, den es gemacht hat, sind mir oft eine Quelle des größten Vergnügens gewesen. Seit etwas über zwey Jahr unterrichte ich andere Kinder in der Geometrie nach den Elementen des Euclides. Sie waren ohngefähr neun Jahr alt, als ich den Anfang machte; jetzt verstehen sie die sechs ersten Bücher der gedachten Elemente, und haben sie in Geläufigkeit inne. Ich trage daher, auf diese Versuche mich stützend, kein Bedenken zu behaupten, daß die Unterweisung in der Geometrie von dem siebenten oder achten Jahre anfangen könne. Warum sollte auch die Geometrie zu schwer seyn? da man die Gegenstände derselben vor die Sinne bringen, sie so von verschiedenen Seiten darstellen und betrachten lassen

kann, und Bemerkungs- und Vergleichungskraft doch auf keine Art und Weise den Kindern abgesprochen werden darf. Dazu kommt, daß man Kinder, weit leichter als Erwachsene, lange mit einerley Gegenstande beschäftigen, und sie auf jede Kleinigkeit in demselben, die bemerkt werden muß, aufmerken lassen, und da, wo es nöthig ist, üben und zu Fertigkeiten bringen kann; denn das Kind folgt mehr, läßt sich besser leiten, und tausend Umstände, die den Erwachsenen nicht mehr rühren, können ihm seine Beschäftigungen angenehm machen. Früh sollte man daher jeden, der in der Mathematic unterrichtet werden sollte, wenigstens in der Geometrie zu unterrichten anfangen, theils um ihn dadurch zum mathematischen oder wissenschaftlichen Denken überhaupt zu bilden, theils ihn in denjenigen Sätzen lange üben und sie ihm in Geläufigkeit beybringen zu können, auf welche man in der Folge stets zurückkommen muß, und sie also ohne Unterlaß gebraucht. Daß dies letzte gewöhnlicher Weise bey dem Unterrichte in der Mathe-

thematic nicht geschieht, daß die Lernenden über die Gegenstände derselben zwar unterrichtet, aber nicht darin so geübt werden, daß sie dieselben in Fertigkeit inne haben, darin und in nichts anders liegt der Grund davon, daß so wenige Lust zur Mathematic haben, dieselbe behalten und Fortgang darin machen; die Schwierigkeiten, die ohne jene Uebung statt finden, müssen sie von der Mathematic abwendig machen. Will man nun aber Kinder in der Geometrie zu unterrichten anfangen, so halte ich es für das beste, solches nicht nur in Gesprächen mit denselben, sondern auch auf eine solche Art zu thun, daß man bey dem Unterrichte selbst anfänglich gar kein Buch zum Grunde legt, und dadurch die Lehrlinge zwingt, sich die jedesmaligen Gegenstände selbst zu denken, und nicht etwa das, was sie in einem Buche darüber finden, blos ihrem Gedächtnisse einzuprägen. Ist dies geschehen, so kann den Lehrlingen über den ihnen schon bekannten Gegenstand mit Nutzen ein für ihre Fähigkeiten eingerichtetes Buch zum Le-

sen gegeben, und nachdem sie darin gelesen, hierrüber mit ihnen von neuen eine Unterredung angestellt werden. Hiezu also habe ich den Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie und diese Fortsetzung desselben geschrieben, und ich wünschte, daß jeder Lehrer, der diese Versuche dazu gebrauchen will, das jedesmal von den Lehrlingen nachzulesende mit denselben zuvor selbst läse, und theils durch einige kleine Erläuterungen, theils und insbesondere durch seinen Ton die Lehrlinge in den Stand setzte, alles recht zu fassen. Dies hat auch gelegentlich den Vortheil, daß dadurch das Buch den Lehrlingen angenehmer wird, und es ist daher auch selbst meine Gewohnheit, dies bisweilen zu thun. Aber vielleicht könnte ein Lehrer auch so gleich mit der Lesung der Gespräche anfangen, und hinterher über den Inhalt des gelesenen sich weiter mit seinen Lehrlingen unterreden. Die Anzahl der Lehrlinge macht hiewider keinen Einwurf, vorausgesetzt, daß es der Lehrer nicht in dem einen oder dem andern Stücke versieht.

steht. Wie glücklich wollte ich mich schätzen, wenn bey der Leichtigkeit, die eine solche Art der Unterweisung selbst für solche Lehrer hat, die keine weitläuftige geometrische Kenntnisse besitzen, meine Versuche eine Veranlassung würden, daß man hie und da mit dem Unterrichte in der Geometrie früher als gewöhnlich anfienge, und dadurch das wichtige und jedem Studirenden nöthige Studium der Geometrie allgemeiner möglich, mit Erfolge möglich machte.

Soll ich nun noch ferner fortfahren, die Geometrie in Gesprächen zu bearbeiten? Ich will es auf das Urtheil der Kenner ankommen lassen. Wo ich die in den herausgegebenen Gesprächen zum Grunde liegende Methode wirklich angewandt habe, habe ich allerdings sehr guten Erfolg wahrgenommen; allein vielleicht ist es zum Gebrauche für andere, da ich bis zur Verwandelung aller geradlinigen Figuren in Quadrate fortgegangen bin, an dem bereits gelieferten genug, zumal da man über die folgenden

Gegenstände schon strenger unterrichten und systematischere Bücher zum Nachlesen empfehlen kann. Ein Beyspiel von dem erwähnten Erfolge sey mir hieher zu setzen erlaubt. Ich beschrieb, als ich mit den vorhin gedachten Kindern mit der Erklärung des sechsten Buchs der Elemente des Euclides zu Stande gekommen war, die erste Figur der ersten Tafel, und darauf erfolgte folgendes Gespräch, welches ich, ohne ein Wort zu verändern, herschreibe.

L. AB ist eine Tangente des Kreises AED für den Punct A, und BED eine Secante, die gezogen seyn kann, wie man will, nur muß sie die Tangente BA in B schneiden. Dies vorausgesetzt, sollen Sie nun, aber ohne andere als euclideische Sätze zu gebrauchen, beweisen, daß AB die mittlere Proportionallinie zwischen BE und BD ist, oder daß

BE: AB = AB: BD.

S. (Nach einigem Nachdenken.) Darf ich aus dem zweyten Buche den Satz voraussetzen, daß das Quadrat von AB so

groß

groß ist, als das Rechteck zwischen BE und BD?

L. Wohin gehörte der Satz, den Sie beweisen sollen, wenn er in dem Euclides hätte angeführt werden sollen?

S. Ins sechste Buch. Nun weiß ich es. Das Quadrat von AB ist so groß als das Rechteck zwischen BE und BD, und Quadrate und Rechtecke haben lauter gleiche Winkel, und es sind also das Quadrat von AB und das Rechteck zwischen BE und BD Figuren mit entgegen gesetzten Seiten. Folglich ist

BE: AB = AB: BE.

Aus diesem kurzen Gespräche erhellet zugleich, daß Gespräche über die Geometrie, je weiter man kommt, wenn sie natürlich seyn sollen, auch desto mehr von der anfänglich nöthigen Weitläuftigkeit verlieren müssen. Werde ich indeß abermals zur Fortsetzung der gelieferten Versuche aufgemuntert, so bin ich ausserdem willens, jedesmal von wirklichen Fällen aus dem gemeinen Leben

auszugehen, von ihnen auf die durch-

zu-

zunehmenden geometrischen Sätze zu kommen, und dann noch von diesen die Anwendung in andern Fällen zu zeigen. Ich schliesse mit dem Wunsche, daß diese Fortsetzung keine Veranlassung werden möge, den Beyfall wieder zurück zu nehmen, welchen der erste Versuch zu erhalten das Glück gehabt hat, und bitte, bey der Beurtheilung darauf mit Rücksicht zu nehmen, daß ich auch die darin enthaltenen Gespräche, nicht gekünstelt, sondern so viel als möglich so als sie wirklich gehalten worden sind, habe liefern wollen. Berlin den 31sten December 1781.

Zehn-

Zehntes Gespräch.

L. Jetzt wollen wir den Anfang machen, das, was wir bisher in der Mathematic durchgenommen haben, noch einmal zu wiederholen. Betrachten Sie also die 2te Figur, welche so gezeichnet ist, daß die Seite AD gleich der Seite AE, und die Seiten DE, DF und EF alle unter einander gleich sind. Können Sie wohl von einem Paar Dreyecken oder einem Paar Winkel oder einem Paar Linien mit Gewißheit behaupten, daß sie gleich sind?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ja, die beyden Dreyecke ADF und AEF sind einander gleich; denn beyde haben die Seite AF mit einander gemein, und AD soll AE, und DF, FE gleich seyn.

L. Gut! aber finden Sie nicht noch mehr gleiches?

S. Der Winkel o muß nun auch dem Winkel x gleich seyn, denn beyde stehen in den gleichen Dreyecken ADF und AEF den gleichen Seiten DF und EF gegenüber; und aus einem ähnlichen Grunde ist auch der Winkel v gleich dem Winkel z, und der Winkel ADF gleich dem Winkel AEF.

L. Dies sind Folgen und allerdings ganz richtig. Sollten Sie aber nicht auch, ohne die Gleichheit der Dreyecke ADF und AEF vorauszusetzen, von einigen in der Figur befindlichen Dingen behaupten können, daß sie gleich sind?

S. (Sinnt wieder nach) Der Winkel m muß gleich seyn dem Winkel t und der Winkel r gleich dem Winkel x, denn es sind Winkel über der Grundlinie in gleichschenkligen Dreyecken.

L. Wie aber, wenn ich Ihnen nun sagte daß, ausserdem daß AD gleich AE und DF gleich, EF ist, auch o gleich x seyn, oder vielmehr, daß es Ihnen erlaubt seyn sollte, Sich auch darauf zu berufen?

S. Dann sind auch die beyden Dreyecke ADG und AGE einander gleich, denn es sind in ihnen zwey Seiten und der Winkel, den sie einschliessen, gleich.

L. Und die Folgen daraus für diejenigen Stücke, die wir noch nicht betrachtet haben?

S. Die Winkel s und p sind einander gleich und die Seiten DG und GE ebenfalls.

L. Nichts weiter?

S. Nein.

L. Was sind denn die Winkel s und p für Winkel?

S. Nebenwinkel.

L. Und wie heissen sie, da sie beyde gleich sind?

S. Rechte Winkel; und also ist die Linie AG perpendiculär auf DE.

L. Was geschieht mit der Linie DE durch die Linie AF in dem Punkt G?

S. Sie wird daselbst in zwey gleiche Theile getheilt.

L. Und was ist durch eben diese Linie mit dem Winkel DAE geschehen?

S. Er ist auch in zwey gleiche Theile getheilt worden.

L. Angenommen also, daß uns von der 2ten Figur bekannt sey, daß die Seite AD der Seite AE, und die Seiten DE, DF und EF alle unter einander gleich sind, so wissen wir, um alles noch einmal zu wiederholen?

S. Erstlich sind gleich die beyden Dreyecke ADF und AEF, und deswegen auch die Winkel o und x, v und z, ADF und AEF; ferner zweytens die Dreyecke ADG und AGE, und daher auch die Winkel s und p und die Seiten DG und GE; drittens die Dreyecke DGF und GEF, denn darin sind nun auch zwey Seiten

und der Winkel, welchen sie einschliessen, gleich, und also auch die Winkel n und q. Endlich steht die Linie AG perpendiculär auf DE, und die Seite DE ist durch die Linie AF in zwey gleiche Theile getheilt, und eben das ist durch diese Linie dem Winkel DAE geschehen?

L. Zu welcher Art von Dreyecken gehört aber das Dreyeck ADE?

S. Zu den gleichschenkligen.

L. Und das Dreyeck DFE?

S. Zu den gleichseitigen. Habe ich das auch mit anführen sollen?

L. Sie hätten es thun können, indeß ists auch hinlänglich, wenn Sie Sichs nun nur recht deutlich merken. Fig. 3. ist ein geradliniger Winkel; theilen Sie denselben in zwey gleiche Theile. Hier ist Zirkel und Lineal, welcher Sie Sich dazu bedienen können.

S. Den Zirkel brauche ich dazu nicht, sondern nur das Lineal. Wenn ich aber nur gerade die Hälfte treffen werde. (Der Lehrling will ohne weitere Umstände sogleich aus dem Punkte A die erforderliche Linie ziehen.)

L. Sie mögen es auf die Art immerhin treffen, so wird es Ihnen doch nicht viel helfen. Erinnern Sie Sich, daß ich Ihnen schon einmal gesagt habe, daß Sie in der Mathematic nie eher zufrieden seyn dürfen, als bis Sie auch den Grund von dem, was Sie behaupten, so anzugeben im Stande sind, daß Ihnen niemand weiter widersprechen darf. Werden Sie

wohl,

wohl, wenn Sie auf die angefangene Art den Winkel BAC getheilt haben, die Richtigkeit Ihrer Theilung beweisen können?

S. Nein — — Aber wie soll ich es alsdann machen? Dann müssen Sie mir es erst zeigen.

L. Wie wenn ich es Ihnen schon gezeigt hätte?

S. — — Wir haben ja aber noch niemals davon gesprochen, wie ein Winkel in zwey gleiche Theile getheilt werden könne.

L Das thut nichts zur Sache. Habe ich nicht Fig. 2. einen Winkel BAC gezeichnet? und ist nicht derselbe durch die Linie AF in die beyden gleichen Winkel o und x getheilt worden?

S. Ja.

L. Können Sie nicht auch von der 2ten Figur beweisen, daß die Winkel o und x darin gleich sind?

S. Das kann ich freylich, aber Sie haben mir dabey auch gesagt, daß die Linien AD und AE einander, und die Linien DE. DF und EF alle unter einander gleich sind. Alle diese Linien habe ich aber bey dem Winkel BAC Fig. 3 nicht.

L. Vielleicht aber könnten Sie Sich alles auch Fig. 3 so machen. Zirkel und Lineal ist Ihnen erlaubt, was Sie damit ausrichten können, das steht Ihnen frey.

S. (Nachdem er noch einmal aufmerksam die 2te Figur betrachtet hat.) Ich nehme also von der

Spitze A aus von den beyden Schenkeln AB und BC mit dem Zirkel zwey gleiche Stücke AD und AE. — — Müssen diese auch gerade so groß seyn als Fig. 2?

L. Ich sagte Ihnen vorhin bloß, daß Fig. 2. AD und AE gleich seyn sollten. Die eigentliche Länge dieser Linien bestimmte ich weiter nicht, und also ist nichts daran gelegen, ob Sie dieselben gerade so groß, oder ob Sie sie grösser oder kleiner machen, als Fig. 2, wenn sie nur gleich werden

S. (Nimmt mit dem Zirkel von AB und AC Fig. 3 zwey gleiche Stücke, und setzt an ihre Endpunkte die Buchstaben D und E, so daß die 4te Figur entsteht.) Nun muß ich die Linie DE ziehen. (Auch dies geschieht und es entsteht die 5te Figur.) — — Wenn ich nun nur wüßte, wie ich ein Paar Linien, wie DF und EF Fig. 2 erhielte! — —

L Nehmen Sie doch einmal die zwölf Regeln zur Hand, die ich Ihnen vor einiger Zeit aufgesetzt habe, und lesen Sie die dritte davon über.

S. Ach nun besinne ich mich schon. Ich muß unter der Linie DE ein gleichseitiges Dreyeck errichten. (Er thut solches und zieht darauf auch die Linie AF so daß die 6te Figur entsteht. Die Aufgabe, ein gleichseitiges Dreyeck über einer gegebenen Linie zu beschreiben ist im 4ten Gespräche da gewesen.)

L. Können Sie mir nun wohl alles, was zur Theilung eines geradlinigen Winkels in zwey gleiche Theile nöhtig ist, hinter einander sagen?

S. Man nimmt zuerst von der Spitze dieses Winkels aus zwey gleiche Stücke von seinen Schenkeln, zieht zwischen den Enden derselben eine gerade Linie, richtet auf dieser ein gleichseitiges Dreyeck auf, und zieht endlich aus der Spitze des zu theilenden Winkels nach der Spitze des gegenüberstehenden Winkels in dem gemachten gleichseitigen Dreyecke eine gerade Linie. Diese Linie theilt den gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile.

L. Können Sie mir auch wohl, aber mit wenigen Worten, den Grund sagen, warum die durch die Linie AF entstandenen Winkel einander gleich sind?

S. O ja! Sie sind Winkel in Dreyecken, die sich decken und stehen darin gleichen Seiten gegenüber.

L. Sie können also nun einen geradlinigen Winkel in zwey gleiche Theile theilen, und Sie haben es gelernet, indem Sie mit Zurückerinnerung an das sonst durchgenommene die 2te Figur betrachteten, ohne dabey anfänglich eine andere Absicht zu haben, als eins und das andere von dem gelernten zu wiederholen. Merken Sie Sich bey dieser Gelegenheit, daß es eine höchst nüzliche Sache sey, das gelernte wieder zu überdenken und es insbesondere auf sol-

che Fälle anzuwenden, die von denen, wobey man es gelernt hat, verschieden sind. Man prägt alsdann sich nicht nur das gelernte tiefer ein, sondern man erweitert auch seine Kenntnisse oft. Vielleicht sind Sie so gar im Stande noch mehr zu entdecken, wenn Sie die 2te Figur und alles dabey angemerkte noch einmal recht aufmerksam überlegen.

S. Die Linie DE ist durch die Linie AF in zwey gleiche Theile getheilt. Vielleicht kann ich auch aus der Figur lernen, wie man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theile?

L. Ganz recht, das ists, was Sie nun zunächst daraus lernen können.

S. Sie sagen: zu nächst. Ist denn ausserdem noch etwas übrig?

L. Wir wollen das nachher sehen. Jezt untersuchen Sie einmal, wie eine gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilt werden könne.

S. (Betrachtet die 2te Figur) Das sehe ich wohl, daß man über und unter der Linie ein Dreyeck errichten muß; aber was für welche? — — Das unter der Linie DE ist ein gleichseitiges, und das über derselben ein gleichschenkliges. — — Nun weiß ichs. Man errichtet über der gegebenen Linie ein gleichschenkliges Dreyeck und unter derselben ein gleichseitiges, und zieht alsdann zwischen den Spitzen der gegen überliegenden Winkel durch die zu theilende Linie eine gerade Linie; so ist dadurch die gegebene in zwey gleiche Theile getheilt.

L.

L. Haben Sie schon ein gleichschenkliges Dreyeck über einer gegebenen geraden Linie errichten gelernt?

S. Nein, sondern ein gleichseitiges. (Denkt etwas nach.) Ich kann aber auch über der gegebenen Linie ein gleichseitiges Dreyeck errichten, denn es können ja in der 2ten Figur die Linien AD und AE so lang seyn, als man will, wenn nur beyde unter einander gleich sind.

L. Versuchen Sie also die Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen. (Es wird den Lehrling eine Linie wie AB Fig. 7 gegeben. Er verfährt damit, wie mit der Linie AB Fig. 32 der ersten Kupfertafel des Versuchs in der 33 und 34sten Figur geschehen, und zieht darauf DE, so daß nun die 8te Figur entsteht.) — Ist nun die Linie AB wirklich in zwey gleiche Theile getheilt?

S. Ja.

L. Wie können Sie das beweisen?

S. Es sind Fig. 8 die beyden Dreyecke DAE und DBE ei nander gleich, weil alle drey Seiten derselben einzeln einander gleich sind, und also auch alle in denselben gleichen Seiten gegenüber stehende Winkel, und folglich die Winkel ADE und EDB. Ist aber dies, so sind auch die Dreyecke ADC und DCB einander gleich, weil sie zwey gleiche Seiten, zwischen denen die Winkel gleich sind, haben; und also sind auch die diesen gleichen Winkeln gegenüber stehende Seiten AC und CB einander gleich.

L. Gesetzt aber, daß man voraussetzen könnte, daß die Winkel ADC und CDB gleich wären; wie könnte dann der Beweis geführet werden?

S. Dann wäre er viel kürzer. Man hätte nur nöthig zu sagen, daß die beyden Dreyecke ADC und DCB, und folglich auch die in ihnen gleichen Winkeln gegenüber stehende Seiten AC und CB gleich sind. Der Grund von der Gleichheit der beyden Dreyecke ADC und CDB bleibt aber eben derselbe.

L. Wie also, wenn man sagte: Um eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen muß man über derselben ein gleichseitiges Dreyeck errichten, und den Winkel desselben, der der gegebenen Seite gegenüber steht, in zwey gleiche Theile theilen. Die Linie, welche den Winkel in zwey gleiche Theile theilt, theilt auch die gegebene Linie auf die verlangte Art?

S. Dann wäre der Beweis leichter, aber das Verfahren um zu theilen selbst dünkt mich dagegen weitläuftiger.

L. Wir wollen es untersuchen. Was ist zu allererst zu thun, um eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen?

S. Zuerst muß auf dieser Linie ein gleichseitiges Dreyeck errichtet werden.

L. Unterscheiden sich hierin die angeführten Arten?

S. Nein. Aber wenn ich nun den Winkel, welcher der gegebenen Seite gegenüber steht, in zwey gleiche Theile theilen soll, so muß ich

erst

erst von seinen Schenkeln zwey gleiche Stücke abschneiden, und zwischen ihren Endpunkten eine gerade Linie ziehen, und auf dieser dann noch ein gleichseitiges Dreyeck aufrichten. So viel habe ich bey der Art, die ich beschrieben habe, nicht nöthig; da beschreibe ich so gleich dies zweyte gleichseitige Dreyeck nach dem ersten.

L. Recht gut; allein betrachten Sie einmal die 5te Figur, und erinnern Sie Sich an das, was vorher davon da gewesen. Wann Sie hier den Winkel A in zwey gleiche Theile theilen sollten; wie würden Sie das machen?

S. Hier hätte ich schon zwey gleiche Stücke von den Schenkeln und auch schon eine gerade Linie zwischen den Endpunkten derselben: ich würde also nur auf DE unten ein gleichseitiges Dreyeck errichten, und von A nach der gegenüberstehenden Winkelspitze eine gerade Linie ziehen.

L. Ist es denn aber nicht völlig eben so, wenn Sie über einer geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck errichtet haben, und nun den gegenüber stehenden Winkel in zwey gleiche Theile theilen sollen?

S. Nun sehe ich wohl ein, daß es völlig einerley Art ist, man mag sagen, so wie ich, oder auf die Art sich ausdrucken, wie Sie angeführt haben. Ich dachte aber wirklich, daß es zwey ganz verschiedene Verfahrungsarten wären.

L. Nach aufmerksamer Betrachtung der Sachen findet man dieselben sehr häufig ganz anders, als man sie sich anfänglich vorgestellt

hat,

hat, und das muß für uns ein starker Bewegungsgrund werden, alles mit der größten Aufmerksamkeit zu betrachten, und nie eher über etwas gewiß zu urtheilen, als bis man solches gethan hat. — — Sie wissen also nun auch, wie man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt, und Sie werden sehr wohl thun, sich dieses so wohl als die Theilung eines Winkels in zwey gleiche Theile zu merken, denn wir werden beydes künftig öft gebrauchen. Aus diesem Grunde wollen wir daher auch noch sehen, ob wir uns nicht bey der Ausübung einige Vortheile machen können. Betrachten Sie also zuvörderst die 6te Figur noch einmal. Haben Sie wohl zu der daben gehabten Absicht die ganzen da beschriebenen Kreise nöthig, oder wäre es genug, wenn Sie unter der Linie DE nur ein Paar sich schneidende Bogen davon hätten, so wie die 9te Figur zeigt?

S. Diese Bogen wären schon hinlänglich, und alsdann könnte man sich auch besser in der Figur finden, so ist sie so verwirrt.

L. Sollen Sie also künftig einen geradlinigen Winkel in zwey gleiche Theile theilen; so beschreiben Sie nicht, wie Fig. 6 ganze Zirkel, sondern nur Bogen, wie Fig. 9, und eben den Vortheil können Sie Sich bey der Theilung einer geraden Linie in zwey gleiche Theile machen. Und nun noch eins. Wenn Sie Fig. 6 die beyden Linien DF und EF nicht gezogen hätten, die daselbst beschriebenen Zirkel oder ein Paar Bo-

gen

gen aber wie Fig. 10 wären da gewesen; hätten Sie nicht gleichwohl die Linie AF, so wie es erfordert wurde, ziehen können?

S. O ja, denn ich ziehe ja diese Linie von A nach dem Durchschnittspunkte der beyden Zirkel oder Bogen.

L. Also hätten Sie auch, wenn Sie den Winkel BAC nur hätten in zwey gleiche Theile theilen wollen, nicht nöthig gehabt, die Linien DF und EF wirklich zu ziehen. Ja auch die Linie DE hätten Sie weglassen können; denn da ihre beyden Endpunkte D und E bestimmt sind, so können Sie Sich die Linie selbst leicht denken. Wenn ich also nun den Winkel BAC in zwey gleiche Theile theilen sollte, so würde ich es auf folgende Art machen. (Der Lehrer zeichnet nun die 10te Figur.)

S. Aber warum habe ich denn erst eine so weitläuftige Art lernen müssen?

L. Würden Sie wohl, wenn ich Ihnen gleich anfänglich die kurze Art gezeigt hätte, den Grund davon eingesehen haben?

S. Nein, aber nun weiß ich die Ursache schon. In der Mathematic muß man von allem den Grund angeben können, und es mußte darum erst weitläuftig gezeigt werden, wie man einen geradlinigen Winkel in zwey gleiche Theile theilt, weil ich sonst den Grund von der Art, wie dies geschieht, nicht gelernt haben würde. Mir fällt aber jezt noch etwas ein, warum es besser ist. Mich dünkt, daß ich nun auch weit leich-

ter

ter die lezte kurze Art behalten werde, als wenn Sie mir bloß gesaat hätten, machen Sie es so.

L. Sie haben Recht; und daß ich noch einen Vortheil hinzusetze: So wie wir alles durchgenommen haben, haben Sie selbst manches gefunden; bey einer andern Art aber hätte ich Ihnen alles sagen und Sie es also bloß mit dem Gedächtnisse fassen müssen, und das ist weder so angenehm noch so nützlich. Doch nun weiter. Hätten wir nicht bey Fig. 8 auch manchen Vortheil uns machen können, vorausgesetzt, daß wir bloß die Linie AB hätten theilen, und nicht die Richtigkeit der Theilung auch in die Augen fallend machen wollen?

S. Ja, statt der beyden ganzen Zirkel hätten wir nur oben und unten ein Paar sich schneidende Bogen nöthig gehat, und die Linien DA, DB. AE und EB hätten ganz wegbleiben können.

L. Auch die Linie DE hätte bis auf ein kleines Stück bey C ungezogen gelassen werden können, wenn es bloß darum zu thun gewesen, die Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen, so daß eine Figur, wie die 11te ist, entstanden wäre. Versuchen Sie nun, ehe wir weiter gehen, eine gerade Linie zu theilen. — (Der Lehrling theilt nun eine Linie, die ihm gegeben worden, sowohl auf die weitläuftige als auf die kurze Art, und hinterher werden die Theile gemessen, um die Theilung zu probiren) — Nun sagen Sie mir mir noch einmal, wie die Linie AG Fig. 2 auf der Linie DE steht?

S.

S. Perpendiculär.

L Hier ist eine Linie AB Fig. 12. und in ihr der Punkt C bemerkt. Versuchen Sie aus diesem Punkte C eine perpendiculäre Linie auf AB aufzurichten. Die zweyte Figur kann Ihre Leiterin seyn, und Sie können Sich dabey auch vorstellen, daß darin das Dreyeck ADE ein gleichseitiges Dreyeck sey.

S. (Sinnt die 2te Figur betrachtend nach.) Ich sehe wohl, daß ich über der Linie AB ein gleichseitiges Dreyeck errichten muß; allein das Stück CB ist grösser als AC, und in der 2ten Figur ist GE so groß als DG.

L. Dem ist ja wohl bald abzuhelfen; überlesen Sie einmal ihre achte Regel.

S. (Thut es) Wie ich doch daran gar nicht gedacht habe! Nun weiß ich es. Ich nehme von dem grössern Stücke CB das Stück CD Fig. 13. welches so groß ist als AC, beschreibe dann über AD ein gleichseitiges Dreyeck, und ziehe nach der Spitze des gegenüber liegenden Winkels aus dem Punkte C eine gerade Linie; diese steht auf AB perpendiculär.

L. Thun Sie es nun wirklich. (Der Lehrling beschreibt eine Figur, wie Fig. 14.) Wie beweisen Sie nun aber, daß die Linie EC perpendiculär auf AB stehe, oder, denn das ist einerley, daß der Winkel ACE dem Winkel ECD gleich sey?

S. Die beyden Dreyecke ACE und ECD sind einander gleich, weil darin alle drey Seiten

gleich sind, und die Winkel ACE und ECD stehen darin den gleichen Seiten AE und ED gegenüber.

L. Gesetzt nun, daß es bloß darum zu thun gewesen wäre, daß die senkrechte Linie EC gezogen würde; hätten Sie dann nicht noch etwas ersparen können?

S. Ja, die Linien EA und ED..

L. Recht; aber zum Beweise waren sie höchst nothwendig. Ins künftige können Sie nun, so lange Sie nicht den Beweis führen sollen, die gedachten Linien weglassen, und wenn es Ihnen bequem ist, so können Sie auf der gegebenen Linie von dem darin bemerkten Punkte aus, Sich ein Paar gleiche Stücke nach Belieben abschneiden, ohne Sich nach dem kleinsten zu richten. — — Wie aber, wenn Sie aus dem Punkte A der Linie AB Fig. 12. eine senkrechte Linie aufrichten sollten?

S. Dann müßte ich wohl erst die Linie AB über A hinaus verlängern.

L. Gut! und dann verführen Sie wie vorhin. Indeß werden Sie künftig noch eine bequemere Art diesen Fall aufzulösen lernen. — — Nun haben wir noch eins übrig. Gesetzt ich bemerkte über der geraden Linie AB Fig. 15. den Punkt C, und verlangte von Ihnen, daß Sie aus diesem Punkte eine senkrechte Linie auf AB herabziehen sollten; wie würden Sie Sich da helfen?

S. Dann

S. Dann müßte ich vor allen Dingen aus dem Punkte C zwey gerade Linien nach der Linie AB ziehen, so wie aus E Fig 14. die Linien EA und ED gezogen sind.

L. Wie wollten Sie das machen?

S. Ich zöge erst von C nach der Linie AB eine Linie aber schief, und beschriebe dann mit dieser Linie aus dem Punkte C einen Bogen, der die Linie AB schnitte, und nach diesem Schneidungspunkte zöge ich dann die andere Linie.

L. Thun Sie es.

S. (Thut es, und beschreibt eine Figur wie die 16te.)

L Allein was fehlt nun noch?

S. Nun theile ich den Winkel C in zwey gleiche Theile, und ziehe die Linie, welche dies thut, bis zur Linie AB. (Es geschieht dies, so daß Fig. 17 entsteht.)

L. Das war ich mir nicht vermuthen, daß Sie Sich bey diesem lezten Falle so würden zu helfen wissen. Aber desto besser, daß Sie es gekonnt haben, und ich werde zur Belohnung, daß Sie heute von dem erlernten so guten Gebrauch zu machen gewußt, auch ferner, wenn wir wiederholen, zugleich Sie selbst manches Ihnen noch unbekannte aufsuchen lassen. Jezt nun noch ein Paar Worte über diese lezte Aufgabe. Man sagt dabey auch, daß man auf der andern Seite der gegebenen Linie noch einen andern Punkt annehmen und aus dem gegebenen

mit der geraden Linie zwischen ihm und dem angenommenen einen Kreis beschreiben solle, welcher die gegebene gerade Linie, die man auch im Nothfall verlängern kann, schneide. Betrachten Sie nur die 18te Figur. Nun zieht man von C nach D und E gerade Linien, die einander, als Halbmesser eines Zirkels, gleich sind, und verfährt übrigens, wie Sie vorher. Den ganzen Kreis aber und die Linien CD und CE braucht man, wenn es einem nicht um den Beweis zu thun ist, nicht zu ziehen, sondern man bemerkt nur die Durchschnittspunkte D und E, und beschreibt aus ihnen mit dem Halbmesser DE die Bogen bey F Fig. 17. und zieht darauf so gleich die CG. — — Aber Sie haben mir noch nicht bewiesen, daß nach Ihrem Verfahren nun auch die Linie CG auf der Linie AB senkrecht sey.

S. Da darf ich ja nur beweisen, daß die Winkel CGD und CGE gleich sind. Es sind aber die Dreyecke CDG und CGE einander gleich, denn CD ist gleich CE, CG ist beyden Dreyecken gemein, und der Winkel DCG ist gleich dem Winkel GCE, denn wir haben den Winkel DCE in zwey gleiche Theile getheilt. Folglich sind nun auch die Winkel DGC und CGE einander gleich, weil sie den gleichen Seiten CD und CE gegenüber stehen, und also die Linie CG perpendicular auf AB.

L. Hier wollen wir heute stehen bleiben. Sie haben heute vier Aufgaben auflösen oder

auf

auf vier Fragen antworten gelernt. Morgen werde ich Ihnen, ehe wir weiter fortfahren, über die erste einen kleinen Aufsatz geben, und nachdem ich dabey noch eins und das andere mündlich gesagt haben werde, sollen Sie über die übrigen Aufgaben oder Fragen ähnliche Aufsätze versuchen.

Eilftes Gespräch.

L. Ich habe Ihnen meinem gestrigen Versprechen gemäß hier einen Aufsatz über die erste von den gestern durchgenommenen Aufgaben mitgebracht. Lesen Sie mir denselben einmal laut vor.

S. (Liest).

Frage.

Wie theilt man einen geradlinigen Winkel in zwey gleiche Theile?

Antwort.

Gesetzt es sollte der Winkel BAC Fig. 3 in zwey gleiche Theile getheilt werden; so müßte man zuerst von den Scheukeln AB und AC zwey gleiche Stücke z. B. AD und AE, wie Fig. 4 geschehen ist, abschneiden, dann die Linie DE ziehen, Fig. 5, über DE ein gleichseitiges Dreyeck DEF Fig. 6 errichten, und aus der Spitze A des gegebenen Winkels eine gerade Linie AF nach der Spitze des gegenüber stehenden Win-

kels ziehen. Ueberhaupt also schneidet man erstlich von der Spitze des gegebenen Winkels an zwey gleiche Stücke von seinen Schenkeln, verknüpfet ihre Endpunkte durch eine gerade Linie, richtet über dieser ein gleichseitiges Dreyeck auf, und zieht endlich aus der Spitze des gegebenen Winkels nach der Spitze des gegenüberliegenden in dem gleichseitigen Dreyeck eine gerade Linie.

Beweis
der Richtigkeit dieser Antwort.

Auf diese Art wird der Winkel BAC Fig. 3 und jeder andere in zwey gleiche Theile DAF und FAE getheilt. Denn es sind Fig. 6.

die beyden Dreyecke DAF und FAE gleich,
weil die Seiten DA und AE, ferner
die Seiten DF und FE es sind, und
die Seite AF beyden gemein ist.

Also sind nun auch die beyden Winkel DAF und FAE einander gleich, denn sie stehen in diesen gleichen Dreyecken den gleichen Seiten DF und FE gegenüber.

Anmerkung.

Wenn man bloß die Theilung eines geradlinigen Winkels zur Absicht hat, so braucht man die Linie DE nicht wirklich zu ziehen, auch die Kreise Fig. 6 nicht ganz zu beschreiben; sondern man behält von allen nur die Bemerkungen der Punkte D und E und zwey sich schneidende Bogen, wie Fig. 10.

L. Ist Ihnen in diesem Aufsatze alles verständlich gewesen?

S. Ja.

L. So versuchen Sie nun', über die drey übrigen gestern beantworteten Fragen ähnliche Aufsätze zu machen. Sie können sich dabey dieser Figuren, Fig. 7. 8. u. s. w. bis 18 bedienen. Zuerst müssen Sie darin die Frage selbst deutlich ausdrucken, dann die Antwort darauf so wohl an einem Beyspiele als allgemein geben, nun zeigen, daß die ertheilte Antwort richtig ist, und endlich in einer Anmerkung die gestern erwähnten Vortheile bemerken. — — Jezt betrachten Sie die 19te Figur, in welcher die Linie CD auf die Linie AB senkrecht gestellt ist. Was sind die Winkel ACD und DCB deswegen für Winkel?

S. Rechte Winkel.

L. Wie viel rechte Winkel machen also zwey Nebenwinkel, wenn die Linien, welche sie machen, auf einander senkrecht stehen?

S. Zwey.

L. Gesetzt nun ich zöge aus dem Punkte C, wie Fig. 20. die schiefe Linie CE, so wäre der Winkel ACE was für einer?

S. Ein stumpfer.

L. Und der Winkel ECB?

S. Ein spitziger.

L. Um was für ein Stück wäre der stumpfe Winkel ACE grösser als der rechte ACD?

S. Um den Winkel DCE.

L. Und um was für ein Stück der spitzige Winkel ECB kleiner als ein rechter?

S. Auch um den Winkel DCE.

L. Ich hatte also in den Winkeln ACD und DCB zwey rechte Winkel. Ich nahm aber von dem einen DCB das Stück DCE weg, so daß davon der spitzige Winkel ECB übrig blieb, und setzte dieses Stück zu dem andern rechten Winkel ACD hinzu, so daß daraus der stumpfe Winkel ACE wurd. Wie viel rechten Winkeln werden nun die beyden Winkel ACE und ECB zusammen genommen gleich seyn?

S. Zwey rechten Winkeln.

L. Natürlicher Weise müssen diese beyden Winkel ACE und ECB eben so groß als die beyden ACD und DCB, oder zwey rechten Winkeln gleich seyn. Gesetzt ich hätte 10 thlr., und hielte davon 5 thl. in der einen Hand und 5 thl. in der andern, nähme darauf aber 2 thl. aus der einen Hand weg und legte sie zu den 5 thlr. in der andern Hand; hatte ich deswegen nun mehr oder weniger als vorher?

S. Nein ich hätte noch eben so viel als vorher.

L. Auf eine ähnliche Art verhält es sich nun mit den Winkeln ACE und ECB Fig. 20 und es sind also diese beyden Nebenwinkel zwey rechten Winkeln gleich Aber wie groß sind die beyden Nebenwinkel FHI und IHG Fig. 21? Diese sind nicht so aus zwey rechten Winkeln entstanden, wie die beyden Fig. 20.

S. Wenn

S. Wenn ich mir aber aus dem Punkte H eine senkrechte Linie aufgerichtet gedächte, oder wirklich aufrichtete, so könnte ich es mir doch denken, und also dünkt mich, daß auch diese beyden Nebenwinkel zusammen so groß als zwey rechte seyn müssen.

L. Gut! Sie können Sich also den Satz merken, und, wenn sich Gelegenheit dazu findet, ihn anwenden: daß jede zwey Nebenwinkel zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel sind. Dieser Satz kann uns sehr nützlich werden, wenn wir bisweilen werden bestimmen wollen, wie groß Winkel sind. Denn so bald wir im Stande sind zu sagen, wie viel ein Winkel von einem rechten Winkel ist, so kennen wir seine Grösse genau, weil alle rechte Winkel sich gleich sind, und wir nun, da wir auf einer geraden Linie eine andere senkrecht aufzurichten gelernt haben, uns, so oft wir wollen, einen rechten Winkel machen können. So haben Sie z. B. gewiß einen deutlichen Begriff von der Grösse eines Winkels, wenn ich sage, daß er so groß sey, als ein halber rechter Winkel, eben so als Sie wissen, wie viel Geld ich meine, wenn ich von einem halben Thaler rede, da Sie einen Thaler kennen. Wir wollen uns daher diesen Satz recht sorgfältig merken, und damit er uns recht nützlich werden möge, so wollen wir ihn so gleich gebrauchen. Sie haben mir schon gesagt, wie groß jede zwey Nebenwinkel zusammen genommen sind; ver-

suchen Sie doch nun auch mir zu sagen, wie groß ein Nebenwinkel allein genommen sey?

S. Das kann ich nicht; denn wenn ich einen allein nehme, so kann derselbe bald groß bald klein, er kann ein rechter Winkel, ein stumpfer Winkel und ein spitziger Winkel seyn.

L. So ganz bestimmt können Sie freylich auf diese Frage nicht antworten, aber einigermassen doch. Kann wohl ein Nebenwinkel allein genommen, da beyde so groß als zwey rechte sind, zwey rechten Winkeln gleich seyn?

S. Nein, er muß kleiner seyn als zwey rechte Winkel.

L. Und um wie viel?

S. Um den andern Nebenwinkel, denn mit diesem macht er ja erst zwey rechte aus.

L. Das war es, was ich gern hören wollte. Wie groß ist also nun ein Nebenwinkel?

S. So groß als zwey rechte Winkel weniger den andern Nebenwinkel. — — Aber nun weiß ich es doch noch nicht genau. Was hilft es mir z. B. wenn ich von dem Winkel IHG Fig. 21 weiß, daß er so groß als zwey rechte Winkel weniger den Winkel FHI ist?

L. Betrachten Sie einmal die 22te Figur, und sagen Sie mir, nach der angeführten Bestimmung, wie groß da der Winkel o sey? AB und CD sind zwey gerade Linien, die sich schneiden.

S. So groß als zwey rechte Winkel weniger r.

L. Oder auch? denn es giebt noch eine andere Bestimmung.

S. So groß als zwey rechte Winkel weniger m.

L. Wie groß ist aber der Winkel x?

S. Auch so groß als zwey rechte Winkel weniger r oder m.

L. Und welcher von den Winkeln o und x ist also grösser?

S. Sie sind beyde gleich, denn ein jeder ist ja so groß als zwey rechte Winkel weniger r oder m.

L. Und wie werden die Winkel r und m gegen einander gehalten beschaffen seyn?

S. Nach einigem Nachdenken) Auch gleich, denn r ist so groß als zwey rechte Winkel weniger o oder x, und m ist ebenfalls so groß als zwey rechte Winkel weniger o oder x.

L. Winkel, wie o und x, oder r und m, welche die Spitze oder den Scheitel gemein haben, und deren Schenkel wechselsweise in einer geraden Linie liegen, dergleichen z. B. entstehen, wenn zwey gerade Linien, wie Fig. 22, einander schneiden, solche Winkel, sage ich, nennt man Scheitelwinkel oder Verticalwinkel. Wie sind also jede zwey Verticalwinkel gegen einander gehalten beschaffen?

S. Sie sind gleich.

L. Auch dies ist ein wichtiger Satz, und wie leicht ist er nicht, wenn man die Grösse eines jeden einzeln Nebenwinkels so als wir es gehabt

haben

haben zu bestimmen sich gewöhnt. War nicht diese Bestimmung also doch gut?

S. Ja.

L. Und sie wird uns künftig schon noch bessere Dienste thun. — — Nun stellen Sie Sich einmal vor, daß Sie in der 21ten Figur nicht wüßten, ob FH und HG eine gerade Linie ausmachten oder nicht; man sagte Ihnen aber, daß beyde Winkel IHG und IHF, die einen Schenkel und den Scheitel gemein haben, zusammen so groß als zwey rechte Winkel wären: könnten Sie daraus wohl beurtheilen, ob FH und HG eine gerade Linie ausmachten, oder nicht?

S. Ja, sie machen eine gerade Linie aus.

L. Warum?

S. Den Grund kann ich nicht angeben, aber es ist ja natürlich.

L. Suchen Sie Sich ja, insbesondere in der Mathematic aber auch überhaupt, für das: das ist natürlich, zu hüten. Je öfter Sie im Anfange einer Wissenschaft, das ist natürlich, sagen und dabey sich beruhigen, desto öfterer müssen Sie in der Folge klagen, das verstehe ich nicht. Der Grund ist hier überdem bald gefunden. Stellen Sie sich nur vor, daß FH und GH nicht in einer geraden Linie lägen, würde dann z. B. wenn GH über H hinaus verlängert würde, diese Verlängerung wohl auf HF fallen?

S. Nein.

L. Wo denn hin?

S. Ent-

S. Entweder über HF oder unter HF.

L. Also z. B. so, wie Fig. 23 und 24. HL fällt?

S. Ja.

L. Nun betrachten Sie in beyden Figuren die Winkel IHL und IHF. Wie groß müßte IHL seyn? IHL und IHG wären zwey Nebenwinkel.

S. IHL müßte so groß als zwey rechte Winkel weniger dem Winkel IHG seyn.

L. Gut. Aber wie groß sollten nach der Voraussetzung IHF und IHG zusammen genommen seyn?

S. So groß als zwey rechte.

L. Also würde der Winkel IHF wie groß seyn?

S. Auch so groß als zwey rechte Winkel weniger dem Winkel IHG. Daraus würde nun folgen, daß IHL und IHF so wohl in der 23 als 24ten Figur einander gleich wären, und das geht nicht, denn Fig. 23 ist IHL kleiner und Fig. 24 grösser als IHF. Nun sehe ich den Grund ein. FH und HG müssen in einer geraden Linie liegen, denn sonst könnten die Winkel IHF und IHG nicht so groß als zwey rechte Winkel seyn.

L. Wenn also zwey Winkel einen Schenkel und den Scheitel gemein haben und zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind, so liegen ihre übrigen beyden Schenkel?

S. In einer geraden Linie.

L. Nun will ich Ihnen noch einen Rath ertheilen dessen Befolgung Ihnen sehr nützlich werden kann. Der Satz: Wenn zwey geradlinige Winkel einen Schenkel und den Scheitel gemein haben und zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind, so liegen die übrigen Schenkel derselben in einer geraden Linie, ist eigentlich nichts anders als der Satz, den wir vorher von den Nebenwinkeln betrachtet haben, umgekehrt; ich meine diesen: Jede zwey Nebenwinkel machen zusammen genommen zwey rechte Winkel aus. Solche umgekehrte Sätze pflegt man sehr häufig so zu beweisen, daß man sich das Gegentheil von dem behaupteten vorstellt, und dann alle Folgen untersucht, die daraus hergeleitet werden können. Insbesondere nimmt man dabey den Satz zu Hülfe, durch dessen Umkehrung der zu beweisende entstanden ist und vergleicht die gefundenen Folgen mit dem bey dem umgekehrten Satze gegebenen Behauptungen. Streiten beyde wider einander, wie das gewöhnlicher Weise der Fall ist, so hat man alle Ursache das angenommene Gegentheil zu verwerfen. Suchen Sie dies, wenn Sie dazu Muße haben werden, für Sich auf den zulezt durchgenommenen Satz anzuwenden, und ausserdem erinnern Sie Sich wieder an alle bereits durchgenommene Sätze, in der Absicht, diejenigen Sich zu merken, bey denen wir einen ähnlichen Beweis geführet haben. Haben Sie dies das nächstemal schon gethan, so will

ich,

ich, nachdem ich Ihre Aufsätze durchgesehen haben werde, mich ausführlich mit Ihnen über diese Beweisart unterreden.

Zwölftes Gespräch.

Die von dem Lehrlinge über die Aufgaben des zehnten Gesprächs gemachten Aufsätze waren nach einiger Veränderung folgende. Das fehlerhafte betraf mehrentheils orthographische Fehler, und die Interpunktion. Einiges von den übrigen folgt in und nach den Aufsätzen selbst. Das cursiv gedrukte oder in eine Parenthese gesetzte war von dem Lehrlinge ausgelassen worden.

Erste Frage.

Wie theilt man eine gegebene gerade Linie in zwey gleiche Theile?

Antwort.

Wenn man eine gerade Linie AB Fig. 7. in zwey gleiche Theile theilen will, so muß man über derselben ein gleichseitiges Dreyeck errichten, den Winkel, welcher in dem errichteten Dreyecke der gegebenen Linie gegenüber steht, in zwey gleiche Theile theilen, die Linie, mit welcher man den Winkel getheilt hat, bis zur gegebenen Linie verlängern, und alsdann theilt diese Linie die gegebene in zwey gleiche Theile, nemlich in AC und CB. (Fig. 8. muß hiebey gedacht werden.)

Beweis
der Richtigkeit dieser Antwort.

Auf solche Weise entstehen zwey gleiche Dreyecke nemlich das Dreyeck ADE und EDB, denn die Seite DA ist gleich der Seite DB, weil es Seiten in einem gleichseitigen Dreyecke sind, die Seite AE ist gleich der Seite BE, weil es Seiten in einem gleichseitigen Dreyecke sind, und die Seite DE ist gleich der Seite DE oder sie gehört zu beyden Dreyecken. Folglich ist auch der Winkel ADC dem Winkel CDB gleich, weil sie in gleichen Dreyecken gleichen Seiten gegenüber stehen. Nun sind ferner die beyden Dreyecke ADC und DCB einander gleich, denn die Seite AD ist gleich der Seite DB, welches schon da gewesen, die Seite AC gehört zu beyden, und der Winkel ADC ist gleich dem Winkel CDB, denn wir haben es bewiesen. Folglich ist auch die Seite AC gleich der Seite CB, weil sie in gleichen Dreyecken gleichen Winkeln gegenüber stehen.

(Die Anmerkung, die noch hätte hinzugefügt werden sollen, war hier so wohl als bey den folgenden ausgelassen; der Lehrling hatte sie, weil die 8te Figur ihn nicht darauf führte, vergessen. Er mußte, um zu zeigen, ob er ihren Inhalt wisse, denselben ausüben, und erhielt dabey den Rath, sich diese Vortheile ja zu merken. Auch wurd der kürzere Beweis, der oben da gewesen, empfohlen.

Zwey-

Zweyte Frage.

Wie errichtet man aus einem gegebenen Punkte einer geraden Linie eine senkrechte Linie?

Antwort.

Wenn man z. E. Fig. 14. aus dem Punkte C in der Linie AB eine senkrechte Linie erichten soll, so muß man zwey gleiche Theile von der Linie AB abschneiden (hier fehlte der Zusatz von dem gegebenen Punkte C aus), dies sey nun A und D, (CA und CD) alsdann errichtet man über der Linie AD ein gleichseitiges Dreyeck (AED) und zieht aus dem Punkte E eine gerade Linie bis zu dem Punkte C, und so wird die Linie EC senkrecht auf der Linie AB stehen.

Beweis
der Richtigkeit dieser Antwort.

Wenn wir beweisen wollen, daß die Linie EC senkrecht auf der Linie AB stehe, so müssen wir beweisen, daß der Winkel ACE gleich ist dem Winkel ECD. Der Winkel ACE ist gleich dem Winkel ECD, weil sie in gleichen Dreyecken gleichen Seiten gegenüber stehen. Denn das Dreyeck ACE ist gleich dem Dreyecke ECD, denn die Seite AE ist gleich der Seite ED, die Seite AC, ist gleich die Seite CD, und die Seite EC ist sich selbst gleich; folglich ist der Winkel ACE gleich dem Winkel ECD, und also steht die Linie EC senkrecht auf der Linie AB.

Dritte Frage.

Wie ziehet man aus einem gegebenen Punkte über einer geraden Linie eine senkrechte Linie auf dieselbe?

Antwort.

Man nehme Fig. 18. die Linie AB und über derselben den Punkt C an. Nun muß man unter der Linie AB noch einen Punkt F annehmen, und aus C mit der Entfernung dieses Punkts von D einen Kreis oder auch nur einen Bogen beschreiben, der die Linie AB in zwey Punkten schneidet, nemlich D und E, nun zieht man von D und E zwey Linien nach C, und theilt den Winkel bey C in zwey gleiche Theile, und zieht die Linie, die diesen Winkel theilt, bis nach der Linie AB, so wird diese Linie senkrecht auf der Linie AB stehen.

Beweis

der Richtigkeit dieser Antwort.

Wenn wir beweisen wollen, daß die Linie CG senkrecht auf der Linie AB stehe, so müssen wir beweisen, daß die Winkel, welche die Linie CG (mit der Linie AB) macht, einander gleich sind. Diese Winkel sind einander gleich, weil sie in gleichen Dreyecken gleichen Seiten gegenüber stehen. (Das übrige des Beweises war so, als am Ende des zehnten Gesprächs solches da gewesen.)

L. Ich bin mit diesen Aufsätzen zufrieden, und Sie werden sehr wohl thun, wenn Sie bisweilen auch ohne meinen Rath Sich einen oder den andern Satz wählen, um das, was wir darüber gesprochen haben, auf diese Art kurz aufzusetzen. — Nun will ich mich mit Ihnen noch einmal über die Beweisart unterreden, der wir uns das leztemal bey dem lezten Satze bedienten. — Wissen Sie, wie lang eine Sache z. E. eine Linie oder ein Baum oder irgend etwas anders ist, wenn ich Ihnen weiter nichts sage, als daß die Länge davon nicht zehn Fuß sey?

S. Nein, denn es kann ja die Linie oder der Baum sechs oder acht oder zwanzig Fuß lang seyn, und noch viel andere Längen haben, die nicht zehn Fuß sind, und wie könnte ich wissen, welche ihm zukäme.

L. Allein wenn auf einem Tische zwey Bücher lägen, das eine in einem Franzbande und das andere in Pappe gebunden, und ich sagte zu Ihnen: holen Sie mir doch von dem Tische das Buch, das nicht in Pappe gebunden ist; wüßten Sie nun, welches ich meinte?

S. Ja, das in einem Franzbande.

L. Wissen Sie auch, wie groß ein Winkel ist, wenn ich sage, daß er kein stumpfer Winkel sey?

S. Nein, denn er kann noch entweder ein rechter oder ein spitziger Winkel seyn, und die spitzigen Winkel sind auch wieder verschieden.

L. Aber wenn ich sagte, daß er weder ein stumpfer noch spitziger Winkel sey?

S. Ja dann wüßte ich, daß es ein rechter wäre, denn weiter ist nichts übrig.

L. Gesetzt also ich sollte Ihnen beweisen, daß ein Winkel ein rechter Winkel sey, und zeigte Ihnen, daß er weder ein spitziger noch ein stumpfer Winkel wäre; hätte ich alsdann gethan, was mir auflag?

S. Ja, Sie hätten bewiesen, daß es ein rechter Winkel wäre.

L. Hätte ich es auch gethan, wenn ich bloß gezeigt hätte, daß es kein stumpfer Winkel sey?

S. Nein, denn es wäre ja ausser dem noch ein Fall möglich.

L. Also muß ich wohl bey dieser Beweisart von allen entgegenstehenden Fällen, die sich denken lassen, zeigen, daß sie nicht statt finden können?

S. Ja.

L. Recht. Wir haben es auch immer so gemacht, wenn wir uns dieser Beweisart bedient haben. Haben Sie Sich wieder daran erinnert, wo es geschehen ist?

S. Ja, bey dem Satze, daß zwey Dreyecke gleich sind, wenn alle ihre Seiten einzeln genommen gleich sind.

L. Wie beweisen wir hier? (Jezt wurd das, was im 8ten Gespräche des Versuchs da gewesen, wiewohl mit den Veränderungen, die die Absicht und Umstände erforderten, wiederholt) —

Kön-

Können Sie mir wohl beschreiben, wie wir bewiesen haben?

S. Wir haben alle Fälle, die ausser dem behaupteten statt finden könnten, widerlegt.

L. Welches waren diese Fälle.

S. (Der Lehrling führt sie nach der Ordnung, wie sie im 8ten Gespräche da gewesen, an.)

L. Als wir zum ersten Male von dem angeführten Satze sprachen, widerlegten wir so gleich einen jeden dieser Fälle, so wie wir darauf kamen, und führten sie nicht erst so an, als Sie es eben jezt gethan haben. Wenn man sich aber alle Fälle anfänglich bloß vorstellt, ohne sie zu widerlegen, so ist das noch besser, man ist nicht so leicht in Gefahr, einen oder den andern auszulassen. Hat man sie sich aber alle aufgesucht und vorgestellt, so muß nun auch die Widerlegung folgen. Wie stellt man nun aber diese Wiederlegung an?

S. Man betrachtet jeden einzeln Fall genau, und untersucht, was daraus folgen würde, und zwar so lange, bis man auf etwas kömmt, was etwas anderm ausgemachten widerspricht.

L. Würde uns dies alles aber etwas helfen, wenn wir nicht alle Fälle, keinen ausgenommen als den zu behauptenden, widerlegten?

S. Nein.

L. Dies ist also nothwendig, und eben deswegen muß man sich auch in der Aufsuchung dieser Fälle alle Mühe geben, daß man keine übersehe. Geschieht dies, so ist eben so wenig

am Ende etwas bewiesen, als es eine genaue Bezeichnung der Grösse einer Sache ist, wenn ich sage, daß zehn Fuß ihre Länge nicht sey, oder eines Winkels, wenn ich sage, er sey kein stumpfer Winkel. Nun wollen wir die übrigen Sätze, die wir von ähnlicher Art gehabt haben, und auch insbesondere den lezten noch einmal durchnehmen, und dann denke ich, sollen Ihnen ähnliche Beweise künftig keine Schwierigkeit mehr machen.

(Ich halte es nicht für nöthig, die Fortsetzung dieses Gespräche herzusetzen, wenn ich den Rath ertheile, hier des 7te Gespräch und das Ende des eilften, so wie vorher bey der Frage: wie beweisen wir hier? das achte Gespräch des Versuchs noch einmal aufmerksam zu überlesen, und dabey sich an das hier gesagte zu erinnern. Ich habe es aus mehrern Erfahrungen, daß eine grössere Weitläuftigkeit hier ohne Nutzen seyn werde, ob ich es gleich für nöthig gehalten, auf die Sätze, die apogogisch bewiesen worden, jezt noch einmal zu kommen.)

Dreyzehntes Gespräch.

L. Heute wollen wir uns über den wichtigen Satz unterreden, daß in jedem Dreyecke, dessen eine Seite verlängert worden, der äussere Winkel grösser ist, als jeder der innern gegen-

über

über stehenden. Um es Ihnen aber einmal recht leicht zu machen, werde ich selbst, ohne Sie zu fragen, diesen Satz Ihnen erstlich erklären, dann zeigen, wie man ihn beweiset, und nun erst mit Ihnen eine Unterredung darüber anfangen. Ich fange also von der Erklärung des Satzes an. — Fig 25 ist ein Dreyeck ABC, in welchem die Seite BC nach D verlängert worden. Hiedurch ist ein äusserer Winkel ACD entstanden, welchem in dem Dreyecke ABC die Winkel A und B gegenüber stehen, die eben deswegen innere gegenüber stehende Winkel von dem äussern ACD heissen, zum Unterschiede von dem Winkel ACB, welches zwar auch ein innerer Winkel, aber von ACD ein Nebenwinkel ist. In jedem Dreyecke, dessen eine Seite verlängert worden, soll nun der äussere Winkel grösser seyn als jeder der innern gegenüber stehenden, also hier z. B. der Winkel ACD grösser als der Winkel A oder als B. Wie beweiset man dies? — Wenn der Winkel ACD grösser seyn soll, als erstlich der Winkel A, so muß ein Theil desselben schon diesem Winkel gleich seyn. Wie also, wenn ich den Winkel ACD so theilte, daß der eine Theil so groß als der Winkel A würde? — Allein wie theilt man in dieser Absicht einen Winkel? Das ist noch nicht da gewesen, und dieser Weg ist also noch zur Zeit verschlossen. Es ist also wohl kein ander Mittel übrig, als daß ich mir vermittelst gleicher Dreyecke, die sich decken, zu

helfen suche. Wie müßten nun wohl die Dreyecke, die hier nützlich seyn könnten, beschaffen seyn? In dem einen müßte der Winkel A sich befinden, und das andere müßte einen Winkel enthalten, der nicht nur diesem Winkel A gleich, sondern auch ein Theil von dem äussern Winkel ACD wäre, und ausserdem müßten beyde Dreyecke so beschaffen seyn, daß ich davon zeigen könnte, entweder daß darin zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel, oder daß alle drey Seiten derselben einzeln genommen einander gleich wären. Ein Dreyeck, worin der Winkel A ist habe ich nun schon an dem Dreyecke ABC, und die Seite AC könnte auch eine Seite des andern werden, wenn wir bereits andere als gleichseitige Dreyecke auf einer gegebenen Linie zu errichten gelernt hätten. Da wir aber so weit noch nicht sind, so wird uns auch das ganze Dreyeck ABC zu unserer jetzigen Absicht nichts helfen. Wir wollen also einmal von den kürzlich durch genommenen Aufgaben Gebrauch machen, und die Linie AC in dem Punkte E Fig. 26 in zwey gleiche Theile theilen. Wenn das geschehen ist, so befiehlt uns die erste der bekannten zwölf Regeln von B bis E eine gerade Linie zu ziehen, und dadurch erhalten wir Fig. 27. ein Dreyeck ABE worin sich ebenfalls der Winkel A befindet. Nun müssen wir sehen, ob wir nicht ein Dreyeck erhalten können, das diesem gleich sey, und dessen ein Winkel bey C zu liegen komme.

Die

Die Linie EC könnte davon eine Seite werden. Verlängern wir nun BE Fig. 28. in G, so werden die Winkel AEB und GEC gleich, denn es sind Verticalwinkel, und nun von der Verlängerung EG ein Stück EF Fig. 29. genommen, das gerade so groß ist als BE, und die Linie FC gezogen, so haben wir alles, was wir brauchen. Denn nun ist

Das Dreyeck EFC gleich dem Dreyecke ABE
weil die Seiten EC und AE,
ferner die Seiten EF und BE
und die Verticalwinkel FEC und AEB gleich
sind.

Folglich sind auch die gleichen Seiten gegenüber stehende Winkel ECF und A gleich; und da der äussere Winkel ACD grösser ist als ECF so muß er auch grösser als der Winkel A seyn.

Nun entsteht die Frage: Ist dieser äussere Winkel auch grösser als der Winkel B Fig. 25? Gesetzt wir verlängerten auch, wie Fig. 30. die Seite AC nach H, so könnten wir eben so als vorhin beweisen, daß der äussere Winkel BCH grösser als der Winkel B sey. Aber BCH und ACD sind Verticalwinkel und also einander gleich; und da der Winkel BCH grösser als der Winkel B ist, so muß auch der Winkel ACD grösser als B seyn, so daß also diese zweyte Behauptung eben keine Schwierigkeit hat. — Ich hoffe, daß Sie alles, was ich gesagt, begriffen haben werden; allein deswe-

gen dürfen wir diesen Satz noch nicht verlassen. Nun wollen wir uns noch darüber unterreden, und Sie werden finden, daß dabey noch manches zu lernen ist. Betrachten Sie alle Figuren, die ich gezeichnet habe, noch einmal, und suchen Sie Sich das gesagte wieder vorzustellen.

S. (Nachdem er dies gethan) Es ist mir alles deutlich, ich wollte schon den Beweis ohne Anstoß führen.

L. Das ist jezt nicht nöthig; sagen Sie mir vielmehr, so kurz als möglich, was ich nach und nach gethan habe.

S. Zuerst haben Sie den Satz selbst gesagt. In jedem Dreyecke, dessen eine Seite verlängert worden, ist der äussere Winkel gröser als jeder der innern ihm gegenüber stehenden.

L. Ließ ich es aber dabey bewenden, daß ich diesen Satz so allgemein ausdruckte, als Sie eben jezt gethan haben, oder setzte ich noch etwas dazu, ehe ich weiter gieng?

S. Sie erklärten darauf den Satz noch an der 25ten Figur.

L. Wird Ihnen nicht durch diese Erklärung der Satz selbst erst recht deutlich?

S. Ja; anfänglich verstand ich ihn bey weiten nicht so, als nach der Erklärung an der Figur.

L. Eine solche Erklärung ist daher ein sehr wichtig Stück bey der Durchnehmung der Sätze der Mathematic. — Gieng ich nun so gleich zum Beweise fort?

S. Nein; Sie änderten erst die Figur durch verschiedene Linien. Sie theilten die Linie AC in zwey gleiche Theile, zogen die Linie BE, verlängerten sie, machten die Verlängerung der Linie BE gleich, und gegen FC.

L. Hätte ich ohne dies wohl den Beweis führen können?

S. Nein.

L. Also auch diese Vorbereitung war wichtig. Endlich folgte?

S. Der Beweis selbst.

L. Wie viel Sätze waren eigentlich zu beweisen?

S. Zwey, erstlich daß der äussere Winkel ACD grösser sey als der Winkel A, und zweytens, daß er auch grösser sey als der Winkel B.

L. Alle Sätze nun, die von der Art, als der eben jetzt betrachtete sind, d. i. die irgend etwas als wahr oder nicht wahr behaupten, nennt man Lehrsätze, merken Sie Sich diesen Namen, und unterscheidet sie dadurch von den Aufgaben, d. h. von den Sätzen, worin gefragt wird, wie man etwas thun müsse, oder welche etwas zu thun vorschreiben. Wir haben dergleichen Aufgaben gehabt, z. B. einen geradlinigen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen und andere. Wenn man einen mathematischen Lehrsatz ordentlich und gehörig durchnehmen will, so muß man zuerst den Lehrsatz selbst, so wie ichs vorhin that, vortragen, dann ihn an einer Figur erklären, oder seinen Sinn

ganz deutlich machen, ferner mit der Sache, welche der Lehrsatz betrifft, die gehörige Vorbereitung vornehmen, und nun endlich zum Beweise des Lehrsatzes fortgehen. Dies wird Ihnen vollkommen deutlich seyn, da Sie so eben ein Beyspiel davon gehabt und aufmerksam betrachtet haben. So bald wir wieder an eine Aufgabe oder Frage kommen werden, sollen Sie auch lernen, daß zur ordentlichen und gehörigen Durchnehmung derselben gehöre, daß man erstlich die Aufgabe selbst oder die Frage vortrage, dann ihren Sinn erläutere, ferner die Antwort oder Auflösung vorbereite, und gebe, und nun den Beweis für die Richtigkeit dieser Antwort oder Auflösung führe. Wenn man sich dies sorgfältig merkt, so leistet es einem bey dem Beweise der Lehrsätze und der Auflösung der Aufgaben eben die Dienste, die man bey einer Reise von einem Verzeichnisse der Oerter erhält, auf welche man kommt. Durch fragen findet man dann hier leicht den ganzen Weg, und durch Nachdenken und Betrachten des jedesmaligen Gegenstandes und Zurückerinnerung an das gelernte dort leicht den Beweis oder die Auflösung. — Jezt noch einige Fragen über den Satz: In einem jeden Dreyecke, dessen eine Seite verlängert worden, ist der äussere Winkel grösser als jeder der innern ihm gegenüber stehenden. Sie bemerkten vorhin selbst, daß bey diesem Lehrsatze zwey Behauptungen zu beweisen sind. Welche nimmt man also zu erst?

S.

S. Daß der Winkel ACD grösser sey als der Winkel A.

L. Wenn in einem Dreyecke ABC die Seite BC nach D verlängert ist, wie Fig. 25, und davon gefragt wird, was zuerst bewiesen werden müsse, dann ist diese Antwort recht. Aber ich frage überhaupt, welche von den jedesmal stattfindenden zwey Behauptungen man zu erst nehmen müsse? auf diese Frage müssen Sie so antworten, daß Sie auf keine Figur Rücksicht nehmen.

S. Wie ist das möglich.

L. Zwischen was für Schenkeln liegt Fig. 25 der Winkel A?

S. Zwischen den Schenkeln AB und AC.

L. Und der Winkel ACD?

S. Zwischen den Schenkeln AC und CD.

L. Hat also nicht der innere Winkel A mit dem äussern ACD einen Schenkel gemein?

S. Ja, den Schenkel AC.

L. Und was muß man also jedesmal zuerst beweisen?

S. Daß der äussere Winkel grösser sey, als derjenige von den innern gegenüber stehenden, der mit ihm einen Schenkel gemein hat.

L. Kann man, wenn so gesagt wird, sich wohl Fig. 25. den Winkel B gedenken?

S. Nein, denn dieser hat mit ACD keinen Schenkel gemein.

L. Welche Seite muß ich ferner in zwey gleiche Theile theilen? beantworten Sie diese

Frage

Frage auch, ohne dazu eine Figur zu gebrauchen.

S. Die Seite, welche ein Schenkel von den beyden Winkeln ist, von welchen ich beweisen will, daß sie ungleich sind.

L. Und wenn das geschehen ist, was ziehe ich dann für eine Linie? Antworten Sie immer so, daß ich Sie ohne auf eine Figur zu sehen verstehen kann.

S. Von dem Theilungspunkte nach der Spitze des gegenüber liegenden Winkels.

L. Wie können Sie also diese Linie nennen?

S. Die Linie zwischen dem Theilungspunkte und der gegenüber stehenden Winkelspitze.

L. Wie aber wohl die Linie EF Fig. 29?

S. Die Verlängerung der genannten Linie.

L. Und die Linie FC?

S. Die Linie zwischen dem Endpunkte der Verlängerung und der Spitze des äusseren Winkels.

L. Alle diese Beschreibungen suchen Sie zu behalten, denn Sie sollen davon Gebrauch machen. Setzen Sie nemlich den durchgenommenen Satz diesmal auf die Art auf, daß Sie erst den Lehrsatz selbst hinschreiben, dann die Vorbereitung folgen lassen, und nun den Beweis führen, aber alles, ohne Sich auf eine Figur zu beziehen, ob Sie gleich bey der Arbeit die nöthigen Figuren betrachten können.

S. Das wird mir schwerer werden, als die Aufsätze, die ich bereits gemacht habe.

L.

L. Aber auch eine um so viel nützlichere Arbeit seyn. Um es Ihnen indeß nicht zu schwer zu machen, so beweisen Sie nur, daß der äussere Winkel grösser sey, als der innere gegenüberstehende, der mit ihm einen Schenkel gemein hat. Damit Sie jezt gleich von dem Nutzen überzeugt worden, den es hat, wenn man sich das gelernte so allgemein denken kann, so sehen Sie die 31te Figur an. Was haben wir hier zuerst zu beweisen, wenn wir darthun wollen, daß der Winkel IFG grösser sey als FHG oder FGH?

S. Daß IFG grösser sey als FGH, denn FGH und JFG haben den Schenkel FG gemein.

L. Und was für eine Seite müßte ich um dies zu beweisen in zwey gleiche Theile theilen?

S. Die Seite FG, weil sie ein Schenkel von den beyden Winkeln IFG und FGH ist, von welchen bewiesen werden soll.

L. Sie haben nicht nur recht, sondern auch mit Gewisheit recht geantwortet Hätten Sie aber vorher stets auf eine Figur Rücksicht genommen, und bloß darnach Sich alles vorstellen gelernt, so würden Sie Sich hier wahrscheinlich, da die 31te Figur eine ganz andere Lage und Gestalt hat als die 25te, eben so geirrt haben, als andere es thun, die man nicht auf das allgemeine geführt hat. Lassen Sie Sich also die Mühe, die Ihnen der aufgegebene Aufsatz machen wird, nicht verdriessen. — Noch eine Anmerkung: Hätten wir uns wohl

von der Wahrheit des durchgenommenen Satzes überzeugen können, wenn wir nicht die eine Seite des Dreyecks in zwey gleiche Theile getheilt hätten?

S. Nein.

L. Wie gut also, daß wir eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilen gelernt hatten. Eben so, als uns hier diese Aufgabe zu statten gekommen, werden uns auch die übrigen in der Folge nützlich und nothwendig werden. Wollen wir aber von ihnen eben so wohl als von den Lehrsätzen, die wir nun wieder gelernt, allen möglichen Nutzen haben, so müssen wir, so oft wir etwas neues untersuchen, sorgfältig überlegen, ob nicht der Gebrauch der einen so wohl als der andern uns zu unserer Absicht beförderlich seyn könne. Mit einem Worte: Sie müssen Sich aus jedem Lehrsatze und aus jeder Aufgabe, die Sie begriffen haben, eben solche Regeln ziehen, als Sie Sich schon aus einigen Lehrsätzen von den Dreyecken gezogen haben. Eine Zeitlang werde ich Sie hierauf nicht bey jedem Lehrsatze und jeder Aufgabe aufmerksam machen, sondern es Ihnen selbst überlassen. Ich werde aber schon eine Zeit finden, wo ich einmal ganz besonders darnach fragen, und alle auf die Art mögliche Regeln mir werde erzählen lassen. Nun weiter! Betrachten Sie die 25te Figur noch einmal, und versuchen Sie zu bestimmen, wie groß in dem Dreyecke ABC die beyden Winkel B und

ACB

ACB sind? Können diese beyden Winkel zusammen genommen wohl grösser seyn als zwey rechte Winkel?

S. (Sinnt nach.) Nein; denn die Winkel ACB und ACD sind zusammen genommen nur so groß als zwey rechte, und da der Winkel B kleiner ist als der Winkel ACD, so können ACB und B zusammen genommen nicht grösser, ja nicht einmal so groß seyn als zwey rechte, sondern sie müssen kleiner seyn.

L. Könnte man, daß in dem Dreyecke ABC Fig. 25 die gedachten beyden Winkel kleiner sind als zwey rechte, auch wohl beweisen, wenn man die Seite BC nicht verlängert hätte?

S. Nein, denn man braucht dazu den äussern Winkel ACD.

L. Wie aber, wenn, wie Fig. 30, die Seite AC verlängert wäre?

S. Dann gienge es auch. BCH und ACB sind nun so groß als zwey rechte, B aber kleiner als BCH, und also B und ACB zusammen kleiner als zwey rechte.

L. Kann ich aber wohl, ohne fernere Verlängerung in der 25ten und 30ten Figur, darthun, daß darin A und B zusammen genommen kleiner als zwey rechte sind?

S. Nein.

L. Wenn ich aber, wie Fig. 32, BA nach E oder nach F verlängerte?

S. Dann könnte ich es auch hievon beweisen.

L. Wie groß sind also wohl in einem jeden Dreyecke jede zwey Winkel zusammen genommen?

S. Kleiner als zwey rechte Winkel.

L. Wie beweiset man das?

S. Man verlängert eine Seite des Dreyecks.

L. Aber was für eine? Antworten Sie allgemein.

S. (Betrachtet zuvor die 25te, 30te und 32te Figur.) Eine Seite welche an beyden oder auch nur an einem von diesen Winkeln liegt.

L. Wohin aber?

S. Wohin es ist, wie z. B. in Fig. 32.

L. Da liegt aber die verlängerte Seite an beyden Winkeln. Ist es Fig. 30, wenn ich beweisen will, daß B und ACB zusammen genommen kleiner als zwey rechte Winkel sind, auch gleich viel, wohin ich die Seite AC verlängere?

S. Nein, hier muß ich sie über die Spitze des einen betrachteten Winkels hinaus verlängern.

L. Wohin muß ich also jedesmal die nöthige Seite verlängern?

S. Wenn sie an beyden betrachteten Winkeln liegt, so ist es gleich viel, wohin? liegt sie aber nur an einem, so muß man sie über die Spitze dieses Winkels hinaus verlängern. —

L. Nun werden Sie Sich auch in dem Beweise dieses ebenfalls wichtigen Satzes nicht leicht irren. Ich nenne diesen Satz wichtig wegen des

Ge-

Gebrauchs, den wir in der Folge davon machen werden, den ich Ihnen aber jetzt noch nicht zeigen kann. Dagegen wollen wir nun einmal überlegen, was dazu gehöre, diesen Satz vollkommen zu verstehen. Was haben Sie also zu seinem Beweise für einen andern Satz unumgänglich nöthig?

S. Daß in einem Dreyecke, dessen eine Seite verlängert worden, der äussere Winkel grösser ist, als jeder der innern gegenüber stehenden.

L. Was wird ferner zum Beweise dieses Satzes erstlich für eine Aufgabe erfordert?

S. Eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

L. Und was für Lehrsätze?

S. Jede zwey Verticalwinkel sind gleich; und: wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und der Winkel, den sie einschliessen, gleich sind, so sind auch die ganzen Dreyecke so gleich, daß sie sich decken.

L. Und endlich welche von den Ihnen gegebenen zwölf Regeln?

S. Die 1te, 2te, die 8te und 9te.

L. Was setzt nun wieder die Aufgabe: eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen, voraus?

S. Die Aufgaben: über einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu errichten; und: einen geradlinigen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

L. Und der Lehrsatz: Jede zwey Verticalwinkel sind einander gleich?

S. Daß jede zwey Nebenwinkel zusammen genommen so groß als zwey rechte sind.

L. Gebrauchen wir nicht aber zum Beweise dieses Satzes wieder eine Aufgabe?

S. Ja, eine senkrechte Linie aufzurichten.

L. Was für eine Menge von Sätzen also erfordert werden! Ohne alle diese Sätze gehörig zu wissen, hätten wir uns von dem lezten nicht überzeugen können, und nun werden Sie schon den Grund merken, warum ich bisweilen sage, daß ich Ihnen dies oder jenes noch nicht erklären könne. Es fehlt Ihnen nemlich noch an Hülfssätzen, und ehe ich z. B. wieder auf die Bestimmung der Höhe eines Thurms komme, von der wir ganz im Anfange redten, müssen Sie noch viele Sätze lernen. Zugleich werden Sie aber auch sehen, wie nothwendig es ist, daß man in der Mathematic keinen Satz wieder vergesse; und auch schon empfunden haben, wie alles, je weiter man fortgeht, immer leichter und angenehmer wird.

Vierzehntes Gespräch.

(In folgendem Aufsatze ist alles unverändert geblieben.)

Lehrsatz.

Wenn man eine Seite eines Dreyecks verlängert, so ist der äussere Winkel grösser,

als

als jeder der innern gegenüber stehenden Winkel.

Vorbereitung.

Man theile diejenige Seite des Dreyecks, welche zugleich ein Schenkel des äussern Winkels ist, in zwey gleiche Theile, ziehe alsdann aus der Spitze des der getheilten Seite gegenüberstehenden Winkels bis zum Theilungspunkte der getheilten Seite eine gerade Linie und verlängere sie, bis die Verlängerung derselben gleich ist. Alsdann verknüpfe man den Endpunkt dieser verlängerten Linie und den Scheitelpunkt des äussern Winkels durch eine gerade Linie.

Beweis.

Auf diese Art entstehen zwey Dreyecke, worinn zwey Seiten und der Winkel den sie einschliessen einander gleich sind, so daß sie sich decken. Einmal sind die Hälften der getheilten obgenannten Seite, Seiten in den beiden Dreyecken, und sind sich gleich, zweitens ist die verlängerte oben genannte Seite ohne die Verlängerung eine Seite in dem einen Dreyecke, und die Verlängerung derselben allein eine Seite in dem andern Dreyecke, sind sich also auch gleich, weil die Verlängerung so groß gemacht wurde, daß sie der Seite, die verlängert worden ist, gleich wurde, und dann sind die Winkel, die diese Seiten einschliessen auch gleich, weil sie Verticalwinkel sind. Also sind sich die ganzen Dreyecke gleich und folglich auch alle übrigen

Winkel, und also ist auch der Winkel in dem einen Dreyeck, der der verlängerten Linie ohne die Verlängerung gegenübersteht, gleich dem Winkel in dem andern Dreyecke, der der Verlängerung allein gegenübersteht, weil die Winkel die in gleichen Dreyecken gleichen Seiten gegenüberstehen, sich auch gleich sind. Da nun aber der Winkel in dem andern Dreyecke, der der Verlängerung ohne die verlängerte Seite gegenüber steht, und nur ein Theil vom ganzen äussern Winkel ist, kleiner als der äussere Winkel ist, so muß auch der Winkel, der in dem einen Dreyecke der verlängerten Seite ohne die Verlängerung gegenübersteht, auch kleiner seyn als der äussere Winkel, da der ihm gleiche Winkel, wie ich vorher gesagt habe, in dem andern Dreyecke nur ein Theil von dem äussern Winkel und also kleiner als er ist. (Hinzugesetzt hätte hier billig noch werden sollen, daß jener kleinere Winkel auch derjenige Winkel im gegebenen Dreyecke sey, den der äussere Winkel nach dem Lehrsatze an Grösse übertreffen soll.)

L. Nun wollen wir uns mit der 33ten Figur beschäftigen; aber alles, was ich Ihnen davon sagen kann ist, daß darin die Seite BC grösser ist als die Seite BA. Können Sie davon etwas weiteres behaupten?

S. (Nachdem er nachgedacht) Nein, denn daraus, daß BC grösser als BA ist, folgt weiter nichts.

L. So

L. So will ich denn zu dem gegebenen noch hinzusetzen, daß es Ihnen erlaubt ist, wenn und wie Sie es für nützlich halten, das Dreyeck ABC Fig. 33 zu verändern, auf die Art nemlich, als wir sonst auch schon die Figuren, welche wir betrachteten, verändert haben.

S. Alsdann kann ich BA, weil diese Seite kleiner ist, als BC, der Seite BC durch Verlängerung gleich machen.

L. Ich will solches an Ihrer Stelle thun. (Die 34te Figur wird beschrieben.)

S. Nun muß von D nach C eine gerade Linie gezogen werden.

L. (Zieht dieselbe, und es entsteht also die 35ste Figur) Was nun?

S. Nun ist das Dreyeck DBC ein gleichschenkliges Dreyeck und also der Winkel D gleich dem Winkel DCB.

L. (Indem der Lehrling nicht so gleich weiter fortfährt.) Hiebey dürfen Sie noch nicht stehen bleiben, denn die Winkel, von welchen Sie behauptet haben, daß sie gleich sind, können bloß als Hülfswinkel betrachtet werden. Versuchen Sie daher, ob Sie nicht etwa von ihnen auf die Winkel in dem Dreyecke ABC selbst schliessen können.

S. Der Winkel ACB ist kleiner als der Winkel DCB.

L. Und den Winkel D also gegen den Winkel ACB gehalten?

S. So ist der Winkel D grösser als der Winkel ACB.

L. Mit was für einem andern Winkel könnten Sie wohl noch den Winkel D vergleichen.

S. (Findet keinen.)

L. Was ist mit dem Dreyecke ADC in der Figur vorgenommen.

S. Die Seite AD ist darin verlängert worden. — Ach mit dem Winkel BAC kann der Winkel D verglichen werden. BAC ist ein äusserer Winkel des Dreyecks DAC und D ein innerer ihm gegenüber stehender, und BAC also grösser als D.

L. Der Winkel BAC ist also grösser als der Winkel D, und D ist wieder grösser als der Winkel ACB. Wie ist also wohl der Winkel BAC gegen den Winkel ACB gehalten?

S. Der Winkel BAC ist auch grösser als der Winkel ACB.

L. Hier können wir stehen bleiben, denn nun haben wir wieder Stücke in dem gegebenen Dreyecke. Allein was ist der Winkel BAC, wenn wir ihn mit Worten beschreiben sollten, für ein Winkel?

S. (Weiß noch nicht zu antworten.)

L. Welcher Seite steht er gegenüber?

S. Der Seite BC.

L. Und was nahmen wir im Anfange von dieser Seite an?

S. Daß sie grösser sey als AB.

L. Was

L. Was ist also der Winkel BAC für ein Winkel?

S. Ein Winkel, der der grössern Seite gegenüber steht.

L. Und der Winkel ACB dagegen?

S. Ein Winkel, der der kleinern Seite gegenüber steht.

L. Was wissen Sie also nun von dem Dreyecke ABC?

S. Daß darin der Winkel, welcher der grössern Seite gegenüber steht, gröſſer sey als derjenige, welcher der kleinern Seite gegenüber liegt.

L. Ist das nur in diesem Falle so, oder findet es sich bey allen Dreyecken?

S. (Sinnt erst nach) Es muß bey allen Dreyecken so seyn, denn eben das, was wir mit dem Dreyecke ABC vorgenommen haben, können wir mit jeden Dreyecke thun, wovon wir wissen, daß darin eine Seite grösser ist als die andere.

L. So können wir uns also den Satz merken, daß in einem jeden Dreyecke der grössern Seite der gröſſere Winkel und der kleinern Seite der kleinere Winkel gegenüber stehe; ein Satz, der uns zur Beurtheilung der Gröſſe der Winkel viel helfen kann. — Allein den Beweis führt man gewöhnlicher Weise nicht so, als Sie ihn geführt haben, sondern mit einiger Veränderung. Wenn Sie von Ihren Regeln guten Gebrauch machen, so müssen Sie diesen Beweis ohne Hülfe finden können. Stellen

Sie Sich noch einmal die 33. Figur vor, und, daß darin BC grösser als AB sey.

S. (Nach einigem Nachdenken) Wenn BC grösser ist als AB, so kann man von BC ein Stück abschneiden, das so groß als AB ist, und von dem Endpunkte dieses Stücks nach dem gegenüber stehenden Winkel wieder eine gerade Linie ziehen. (Dies geschieht in der 36sten Figur, worin also AB und BD gleich sind.) Nun ist hier wieder ein gleichschenkliges Dreyeck ABD, worin also die Winkel BAD und ADB einander gleich sind, denn es sind die Winkel über der Grundlinie. Der Winkel BAC aber ist grösser als BAD oder ADB, und der Winkel ADB grösser als der Winkel ACB, denn ADB ist ein äusserer Winkel von dem Dreyecke ADC und ACB ein innerer ihm gegenüber stehender; also ist der Winkel BAC auch grösser als der Winkel ACB.

L. Viel Unterschied ist eben unter beyden Beweisen nicht, und Sie können jedesmal gebrauchen, welchen Sie wollen. Nun versuchen Sie den Satz umzukehren.

S. In einem jeden Dreyecke steht dem grössern Winkel die grössere Seite, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüber.

L. Wie würden Sie nun diesen Satz beweisen? überdenken Sie ihn nur recht.

S. Es ist ein umgekehrter Satz, und ich muß also beweisen, daß das Gegentheil davon nicht möglich ist.

L. Stellen Sie Sich nun in der 33sten Figur vor, daß der Winkel A grösser als der Winkel C sey, so hätten Sie zu beweisen?

S. Daß auch die Seite BC grösser als die Seite BA sey.

L. Und das Gegentheil davon wäre?

S. Daß entweder BC und BA gleich, oder BA grösser als BC wäre.

L. Sollte das nicht statt finden können?

S. Nein; denn wenn BC und BA gleich wären, so müßten auch die Winkel A und C einander gleich seyn, weil alsdann das Dreyeck BAC ein gleichschenkliges Dreyeck wäre; wäre aber BA gar grösser als BC, so müßte der Winkel C auch grösser seyn als der Winkel A, nach dem Satze, den wir eben erst gehabt haben, und wir haben angenommen, daß der Winkel A grösser seyn soll als der Winkel C. Es muß also BC grösser seyn als BA, weil weder beyde Linien gleich, noch BC kleiner seyn kann als BA.

L. Es scheinet, als ob Ihnen nun diese Art zu beweisen nicht mehr schwer sey, und sie ist auch leicht, so bald man sie nur erst begriffen hat. Nun haben wir also auch einen Satz, dessen wir uns bedienen können, wenn wir bestimmen wollen, ob eine oder mehrere Linien grösser als eine andere seyn. Wenn man mehrere Linien mit einer vergleichen soll, so setzt man jene alle in eine gerade Linie zusammen. Eine Anwendung von diesem lezten Satze wollen wir doch machen. Versuchen Sie also zu

beur=

beurtheilen, ob Fig. 37 die beyden Seiten BA und AC zusammen genommen grösser als die dritte BC sind. Wie werden Sie Sich hier helfen?

S. Ich muß, wie Sie eben gesagt haben, die beyden Seiten BA und AC in eine gerade Linie zusammen setzen. Ich will also BA so weit verlängern, bis die Verlängerung so groß als AC ist, und dann werde ich wohl wieder nach der ersten Regel eine Linie ziehen müssen. (Es geschieht dies und es entsteht die 38ste Figur.) Aber wie nun weiter?

L. Stellen Sie Sich einmal vor, als ob die Linie AC Fig. 38 nicht da wäre, so wie die 39ste Figur gezeichnet ist. Was hätten Sie nun nach den heute durchgenommenen Sätzen nöthig zu wissen, um überzeugt zu seyn, daß die Seite BD grösser sey als die Seite BC?

S. Daß der Winkel C grösser sey als der Winkel D.

L. Und sollten Sie das nicht in der 38sten Figur beweisen können?

S. (Denkt einige Augenblicke nach) Ja das Dreyeck ADC ist gleichschenklig, und also der Winkel ACD gleich dem Winkel D. Der Winkel BCD muß also grösser seyn, als der WinkelD; und stelle ich mir nun vor, daß die Linie AC nicht gezogen wäre, so habe ich ein Dreyeck BCD, worin der Winkel BCD grösser als der Winkel D ist. Dieserwegen muß nun aber auch die

Seite

Seite BD, oder die beyden Seiten BA und AC des Dreyecks BAC grösser seyn als die dritte BC.

L. Sollten wir wohl auf eben die Art von jeden zwey Seiten eines Dreyecks beweisen können, daß sie zusammen genommen grösser als die dritte seyn müssen?

S. (Nachdem er zuvor nachgedacht) Ja.

L. Also hätten wir wieder einen neuen Lehrsatz. Wiederholen Sie ihn noch einmal.

S. In einem jeden Dreyecke sind jede zwey Seiten zusammen genommen grösser als die dritte.

L. Was ist zum Beweise dieses Satzes für Vorbereitung nöthig? beschreiben Sie aber alles mit Worten.

S. Man verlängert eine von den zwey Seiten, die zusammen genommen grösser seyn sollen als die dritte, macht die Verlängerung der andern Seite gleich, und zieht von dem Endpunkte derselben nach dem gegenüberstehenden Winkel eine gerade Linie.

L. Sie müssen noch dazu setzen, daß man über den Punkt, worin beyde Linien zusammen kommen, hinaus verlängern müsse, auf diese Art ist alles richtig und vollständig. Wenn nun in jedem Dreyecke jede zwey Seiten zusammen genommen grösser als die dritte sind, ist man dann wohl im Stande, aus drey Linien z. B. AB, CD und EF Fig. 40, wovon zwey nemlich CD und EF zusammen kleiner sind, als die dritte AB, ein Dreyeck zu machen?

S. Nein.

L. Das können Sie nunmehr leicht beurtheilen und einsehen, vor dem lezten Satze aber hätte es Ihnen vielleicht möglich geschienen. — Was müssen also die drey geraden Linien, woraus man ein Dreyeck beschreiben soll, für eine Eigenschaft haben?

S. Es müssen jede zwey davon grösser seyn als die dritte.

L. So sind nun die drey Linien AB, CD und GH Fig. 40 beschaffen. Wie würden Sie daraus wohl ein Dreyeck zusammen setzen? Erinnern Sie Sich nur an die Art, wie über einer geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck errichtet wird, und überlegen Sie den gegenwärtigen Fall genau, so wird es Ihnen nicht schwer fallen, auf diese Frage zu antworten.

S. (Nachdem er eine Zeitlang nachgedacht) Ich müßte aus den Endpunkten der einen Linie mit Halbmessern, welche den beyden andern Linien, einzeln genommen, gleich wären, Kreise oder Bogen beschreiben, die sich schnitten, und dann aus dem Schneidungspunkte nach den Endpunkten der ersten Linie gerade Linien ziehen. Ich könnte z. B. AB zuerst nehmen, und nun beschriebe ich (Fig. 41.) aus A mit GH und aus B mit CD zwey Kreise oder nur Bogen, und zöge dann KA und KB.

L. Noch weniger wird es Ihnen also schwer seyn, z. B. über AB ein gleichschenkliges Dreyeck zu errichten, dessen Schenkel der Linie GH gleich wären. (Fig. 40.)

S. Denn

S. Dann beschriebe ich aus A und B mit der Linie GH zwey Bogen, die sich schnitten, und zöge die Linien MA und MB Fig. 42.

L. Wie groß muß aber in diesem Falle die Linie GH zum wenigsten seyn? Wäre es genug, wenn sie halb so groß als die Grundlinie AB wäre?

S. Nein, sie muß grösser als die Hälfte seyn, denn sonst wären beyde Schenkel zusammen genommen nicht grösser als die Grundlinie.

L. Nun Sie dies wissen, bin ich im Stande Ihnen noch einige Vortheile bey den Aufgaben, die wir neulich hatten, zu sagen. Allenthalben nemlich, wo Sie über einer geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu errichten hatten, z. B. Fig. 6 und 14, da können Sie nun auch ein gleichschenkliges nehmen, wenn nur ein Schenkel jedesmal grösser als die Hälfte der Grundlinie von Ihnen genommen wird. Eben dieses Vortheils können Sie Sich bedienen, wenn Sie auch nur Bogen beschreiben. Auf diese Art ersparen Sie oft Raum, und haben nicht so oft nöthig, den Zirkel bestimmt zu öffnen. Ausserdem können wir von der Beschreibung eines ungleichseitigen Dreyecks aus drey geraden Linien, oder eines gleichschenkligen aus zweyen, noch einen Vortheil ziehen. Gesetzt nemlich, daß Sie an einen Punkt einer geraden Linie z. B. DE Fig. 43 einen Winkel legen sollten, der einem andern z. B. BAC Fig. 3 gleich wäre, so könnten Sie es auf eine ähnliche Art thun. Oder sollten wir deswegen, daß

Fig.

Fig. 3 kein Dreyeck, sondern ein blosser Winkel ist, dazu nicht im Stande seyn?

S. Das kann nichts ausmachen, denn wir dürfen ja nur zwischen den Schenkeln, wie Fig. 5, eine andere Linie DE ziehen, so haben wir so gleich eins.

L. Wie würden Sie also auch den Winkel BAC an D legen können?

S. Ich schneide von der Linie DE Fig. 44 erst das Stück DG, welches so groß als AD ist, ab, ferner beschreibe ich aus dem Punkte A mit dieser Linie oder mit AE, und aus dem Punkte G mit DE Bogen die sich schneiden, und ziehe dann aus dem Punkte G nach dem Durchschnittspunkte H eine gerade Linie.

L. Wären Sie aber nun auch wohl im Stande zu beweisen, daß Sie das verlangte richtig erhalten hätten.

S. (Besinnt sich erst einige Augenblicke.) Nein, dazu müßte ich noch die Linie HG ziehen. Aber dann wären die beyden Dreyecke DHG Fig. 44 und ADE Fig. 5 einander gleich, weil alle drey Seiten einzeln genommen in beyden gleich sind, und folglich auch die Winkel D und A, weil sie gleichen Seiten gegenüber stehen.

L. Wenn Sie künftig bey der Zeichnung einer Figur bisweilen Winkel an Linien zu legen haben, so werden Sie immer am besten thun, wenn Sie es gerade so machen als jetzt, oder die beyden Stücke, welche Sie von den Schenkeln des gegebenen Winkels nehmen, gleich seyn lassen.

Funf=

Funfzehntes Gespräch.

L. Was stellt die 45te Figur vor?

S. Zwey Dreyecke, ABC und DBC.

L. Wie können Sie dieselben genauer beschreiben?

S. Es sind zwey Dreyecke, die eine Seite gemein haben.

L. Und wie verhält es sich mit den beyden übrigen Seiten?

S. Die beyden übrigen Seiten des einen Dreyecks liegen ganz innerhalb der beyden übrigen Seiten des andern.

L. Nehmen Sie nun Ihre zwölf Regeln zur Hand, und suchen Sie, vermittelst derselben so wohl als durch Ueberdenkung der übrigen gelernten Sätze, von diesen beyden Dreyecken einen Satz zu finden, und denselben zu beweisen. Ich werde Sie dabey Sich selbst überlassen. Ueberlegen Sie erst alles genau, und dann setzen Sie so gleich Lehrsatz, Vorbereitung und Beweis so kurz als möglich auf. Wenn dies geschehen, so wollen wir fortfahren uns zu unterreden.

(Der Lehrling ändert hierauf die 45te Figur in die 46te ab, und übergiebt folgenden Aufsatz.)

Lehrsatz.

Der Winkel BDC ist grösser als der Winkel BAC.

Vorbereitung.

Man ziehe die Linie AD und verlängere selbige über D hinaus nach E.

Beweis.

Der Winkel BDE ist grösser als der Winkel BAE, und der Winkel EDC grösser als der Winkel EAC; folglich sind auch die beyden Winkel BDE und EDC zusammen genommen grösser als die beyden Winkel BAE und EAC zusammen genommen, oder der Winkel BDC grösser als der Winkel BAC.

L. Wie sind Sie auf diesen Satz gekommen?

S. Ich las meine Regeln durch, und zog nach der ersten die Linie AD. Weil mir aber diese Linie allein nichts half, so verlängerte ich sie nach der zweyten Regel, und da fand ich, als ich die Figur aufmerksam betrachtete, daß in den beyden Dreyecken BDA und ADC die Seite AD verlängert, und also in beyden der äussere Winkel grösser sey als der ihm gegenüber stehende innere. Ich merkte mir dies und sah denn bald, daß ich statt der Theile die Ganzen nehmen konnte.

L. Es ist das alles recht gut, nur hätten Sie in dem geführten Beweise auch von jeder Behauptung den Grund mit hinsetzen sollen, so wie Sie ihn jezt wirklich angegeben haben. Eben diesen Satz müssen Sie aber noch auf eine andere und bessere Art beweisen können. Ich will Ihnen noch einige Zeit zum Aufsuchen

suchen geben; Sie müssen aber wieder von der 45ten Figur anfangen.

S. (Nachdem er die 45te Figur in die 47te verwandelt und hierüber nachgedacht hat, freudig). Ich habe schon einen andern Beweis gefunden. Ich habe die Linie BD nach F verlängert. Nun ist der äussere Winkel BDC von dem Dreyecke DFC grösser als der innere gegenüber stehende DFC, und dieser Winkel ist aus einem ähnlichen Grunde grösser als der Winkel BAC. Also muß auch der Winkel BDC grösser seyn als der Winkel BAC. Soll ich diesen Beweis aufsetzen?

L. Es ist nun nicht nöthig.

S. Dieser Beweis ist auch besser als der erste, weil er kürzer ist. Es ist doch der, den Sie meinten?

L. Ja. — — Nun haben wir von diesen beyden Dreyecken noch einen andern Satz zu behaupten, dessen Beweis Sie aber wohl nicht allein werden finden können. Der Satz selbst ist, daß die Seiten BA und AC zusammen genommen grösser sind als die Seiten BD und DC zusammen genommen. Die beyden Seiten also, die den grössern Winkel einschliessen, sind die kleinern, und die, welche den kleinern Winkel einschliessen, die grössern. Wollen wir diesen Satz beweisen, so müssen wir, da er von Ungleichheit der Linien redet, wo möglich, von einem andern ausgehen, in welchem ebenfalls von Ungleichheit mehrerer Linien eine

Behauptung enthalten ist. Erinnern Sie Sich wohl an einen solchen Satz?

S. In einem jeden Dreyecke steht dem grössern Winkel die grössere Seite und dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüber.

L. Von diesem Satze werden wir hier keinen Gebrauch machen können. Ist Ihnen nicht noch ein anderer bekannt?

S. In einem jedem Dreyecke sind jede zwey Seiten grösser als die dritte.

L. Was können Sie nach diesem Satze von dem Dreyecke ABF Fig. 47. behaupten?

S. Daß die Seiten BA und AF zusammen genommen grösser sind als BF.

L. Und wenn ich nun zu den beyden ersten Linien so wohl als zu der dritten die Linie FC hinzunähme, wie würden BA und AF und FC, oder BA und AC, gegen BF und FC gehalten, beschaffen seyn?

S. BA und AC sind auch grösser als BF und FC.

L. Nach was für einer Regel ist hier gehandelt und geschlossen worden?

S. (Ueberlieset die erhaltenen zwölf Regeln) Ich finde hier keine.

L. Wir können uns also hier merken, daß, wenn man zu jeder von zwey ungleichen Grössen eine und eben dieselbe andere setzet, die neuen dadurch entstehenden Grössen ebenfalls ungleich sind; und daß es oft nützlich ist, auf diese Art zu verfahren. Ich hätte Ihnen diese Re-

gel

gel gleich anfänglich mit den andern gegeben; allein ich wollte damals die Anzahl der Regeln so klein als möglich machen. —— Was können Sie nun ferner nach dem vorhin angeführten Satze von dem Dreyecke DFC behaupten?

S. Daß darin auch DF und FC zusammen genommen grösser sind als DC.

L. Und könnten Sie hier auch wohl die eben gesagte Regel anwenden?

S. Ja, ich könnte zu den ersten beyden Linien so wohl als zu der dritten die Linie BD setzen.

L. Und was können Sie alsdann behaupten?

S. Daß BD und DF und FC, oder BF und FC, grösser sind als BD und DC.

L. Vorhin sahen wir, daß BA und AC grösser sind als BF und FC, und jetzt haben wir gesehen, daß BF und FC grösser sind als BD und DC. Was folgt daraus?

S. Das BA und AC auch grösser sind als BD und DC.

L. Und dies war es, was wir beweisen wollten.

S. Ich finde doch den Beweis so schwer nicht, als ich mir vermuthen war.

L. Zu verst hen ist er auch eben nicht schwer; allein ohne Hülfe hätten Sie ihn doch wohl nicht gefunden. Damit Sie aber dazu in der Folge im Stande seyn mögen, so überdenken Sie noch, ehe wir weiter gehen, den Weg,

den wir gegangen sind, sorgfältig. Wir wollten beweisen, daß Fig. 45.

BA und AC grösser sind als BD und DC.

In dieser Absicht fiengen wir von dem ähnlichen Satze, von dessen Wahrheit wir vollkommen überzeugt waren, an, daß

BA und AF grösser als BF.

Nun nahmen wir die Linie FC zu Hülfe, und schlossen, daß auch

BA und AF und FC grösser als BF und FC, oder

1. BA und AC grösser als BF und FC sey.

Bey diesem Satze blieben wir stehen, und betrachteten ferner das Dreyeck DFC, wovon wir auch behaupteten, daß

DF und FC grösser als DC.

Dann nahmen wir die Linie BD zu Hülfe, und kamen so auf den Satz, daß

BD und DF und FC grösser als BD und DC, oder

2. BF und FC grösser als BD und DC.

Endlich schlossen wir aus dem Satze Nr. 1. und Nr. 2, daß

BA und AC grösser als BD und DC.

Wenn man also einen Satz beweisen will, so muß man vor allen Dingen sich diesen Satz selbst erst deutlich vorstellen, und ihn zu dem Ende sich, wenn er allgemein ausgedruckt ist, an einer Figur erläutern. Ist dies geschehen, so ist gewöhnlicher Weise eine Veränderung der Figur durch Ziehung dieser oder jener Linie

nöthig,

nöthig, auf welche man durch Ueberlegung der bekannten Regeln leicht geleitet wird. Hierauf muß man suchen, von einem ausgemachten Satze anzufangen, der mit dem zu beweisenden Aehnlichkeit hat, und dessen Glieder sich in die Glieder des zu beweisenden verwandeln lassen. Ich verstehe hier unter der genannten Aehnlichkeit, daß der ausgemachte Satz, von welchem man ausgehet, eben so als der zu beweisende entweder von Gleichheit oder von Ungleichheit rede; und unter den Gliedern dieser Sätze die Grössen, die vor oder nach den Worten gleich, grösser oder kleiner stehen. Endlich ist noch übrig, daß man die Glieder des ausgemachten Satzes durch Hinzusetzen und Wegnehmen oder auch auf andere Art, wie nemlich andere Sätze, deren Anwendung möglich ist, es an die Hand geben, in die Glieder des zu beweisenden Satzes verwandele. Geradeso haben wir es jetzt gemacht, und ob gleich das, was ich eben gesagt habe, in vielen Fällen nicht nur sehr erweitert, sondern auch hier und da verändert werden muß, so wird es Ihnen doch auch ohne dieses schon wichtige Dienste leisten können. — Wenn Sie Sich nun noch merken, daß man bey dem Beweise des Satzes BA und AC Fig. 47 ist grösser als BD und DC von dem äussersten Dreyecke BAF anfange, und von da immer weiter nach den innern fortgehe, so werden Sie den geführten Beweis auch nicht leicht wieder vergessen. — Und daß ich Ihnen endlich sage, wie man den

bewiesenen Satz allgemein, und so kurz als möglich, ausdrucken könne, so merken Sie Sich ihn auf folgende Art. Wenn man aus den beyden Endpunkten der einen Seite eines Dreyecks nach irgend einem Punkte innerhalb desselben zwey gerade Linien zieht; so schliessen diese beyden geraden Linien einen grössern Winkel ein als die beyden übrigen Seiten des Dreyecks, sind aber zusammen genommen kleiner als die gedachten beyden Seiten des Dreyecks zusammen genommen. — — Was meinen Sie aber nun? Sollten wir, wenn wir fortfahren die 45ste Figur zu betrachten, dadurch wohl noch auf andere Sätze geleitet werden können?

S. (Nachdem er sich lange bedacht) Nein.

L. Wir haben in dieser Figur zwey Dreyecke ABC und DBC, die eine Seite gleich haben, und wovon das eine, wenn die beyden gleichen Seiten auf einander gelegt worden, ganz innerhalb des andern fällt. So lange uns von zwey Dreyecken nichts weiter bekannt ist, so lange können wir auch nichts weiter von ihnen behaupten. Wie aber, wenn wir uns einmal vorstellten, daß die Seite BD auch der Seite BA gleich wäre, wie Fig 48?

S. Nun vielleicht; denn wenn wir nun die Linie AD, Fig. 49, ziehen, so erhalten wir ein gleichschenkliges Dreyeck, das wir vorher nicht hatten.

L. Gut. Vorher, da uns nur eine Seite gegeben war, bestimmten wir das Verhältniß der beyden übrigen. Jetzt sind uns nun zwey Seiten gegeben, und also nur noch übrig?

S. Die dritten Seiten CA und DC.

L. Diese stehen, was für Winkeln gegenüber?

S. Die Seite CA steht dem Winkel ABC, und die Seite DC dem Winkel DBC gegenüber.

L. Welcher ist davon grösser?

S. Der Winkel ABC.

L. Es entsteht also die Frage. Wie sind, wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten gleich sind, die Winkel aber, welche von diesen Seiten eingeschlossen werden, ungleich sind, die dritten Seiten, welche diesen ungleichen Winkeln gegenüber stehen, beschaffen? nach der 48sten oder 49sten Figur: Wie ist die Linie AC gegen die Linie AD gehalten beschaffen?

S. Sie müssen ungleich seyn, man sieht es hier gar zu offenbar.

L. Aber das ungeachtet müssen Sie nicht bey dem Scheine stehen bleiben, zumal da es Ihnen nicht mehr an den Gründen fehlt, nach welchen Sie hier zu urtheilen haben.

S. Die Seiten AC und DC sind auch zwey Seiten in dem Dreyecke ADC, und wenn ich also beweisen kann, daß der Winkel ADC grösser ist als der Winkel CAD, so ist auch bewiesen, daß die Seite AC grösser ist, als die Seite DC. — Aber ich sehe noch nicht wie?

Hiezu hilft mir das gleichschenklige Dreyeck ABD nichts.

L. Wie aber, wenn wir, wie Fig. 50, die Schenkel desselben nach E und F verlängerten?

S. (Nachdem er zuvor nachgedacht.) Nun kann ich es beweisen. Die Winkel EAD und FDA unter der Grundlinie des gleichschenkligen Dreyecks ABD sind einander gleich, und folglich CAD, ein Theil des einen, kleiner als der andere ADF. Wenn nun der Winkel ADF schon grösser ist als der Winkel CAD, so muß der Winkel ADC noch mehr grösser seyn; und daher ist nun auch AC grösser als DC, denn in jedem Dreyecke steht dem grössern Winkel die grössere Seite und dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüber.

L. So war es ganz recht. — Allein wenn wir nun zwey Dreyecke wie ABC und DBC Fig. 48. hätten, in welchen zwey Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, BC nemlich gleich BC, BA gleich BD, und ABC grösser als DBC wäre; es wäre aber zugleich der Winkel DCB grösser als der Winkel ACB: würde dann wohl, wenn man beyde Dreyecke mit der gleichen Seite BC auf einander und nach einer Gegend zu legte, die Seite DC auch innerhalb des Dreyecks ABC fallen?

S. Nein, dann müßte sie auswärts fallen, wie Fig. 51.

L. Sollte man auch hier beweisen können, daß die Linie AC grösser als die DC ist?

S. (Nach

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ja, denn wenn man wieder die Seite AD zieht (Fig. 52.) so sind in dem gleichschenkligen Dreyecke ABD die Winkel über der Grundlinie DAB und BDA einander gleich. Ist aber dies, so muß der Winkel BDA grösser seyn, als der Winkel DAC, und also ADC noch mehr grösser als DAC. Folglich ist auch die Linie AC grösser als die Linie DC.

L. Wovon hängt es ab, ob die Linie DC innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks ABC fällt?

S. Von der Grösse des Winkels DCB. Ist er kleiner als der Winkel ACB, so fällt DC innerhalb; ist er aber grösser, so fällt DC ausserhalb.

L. Und wie, wenn beyde Winkel gleich wären?

S. Dann müßte DC auf AC fallen; aber dann wäre auch in die Augen fallend, daß AC grösser als DC sey, denn DC ist dann nur ein Theil von AC. (Siehe Fig. 53.)

L. Dieser lezte Fall ist allerdings unter allen der leichteste, aber deswegen nicht weniger wichtig. Es ist recht gut, daß wir erst zulezt darauf gekommen sind, denn nun können wir ihn bequem noch besonders betrachten. Wie viel Stücke sind also in den beyden Dreyecken ABC und DBC Fig. 53. gleich?

S. Drey, zwey Seiten und ein Winkel, der aber von den gleichen Seiten nicht eingeschlossen wird.

L. In diesem Falle ist nun, so wie überhaupt, wenn nur zwey Seiten in zwey Dreyecken gleich und die eingeschlossenen Winkel ungleich sind, also auch hier, die dritte Seite des Dreyecks, welches zwischen den gleichen Seiten den grössern Winkel hat, grösser als die dritte Seite des andern Dreyecks. Gesetzt nun ich machte in der 53ten Figur den Winkel ABC noch grösser als er jetzt ist, würde die Seite AC eben dieselbe Grösse, die sie jetzt hat, behalten können?

S. Nein, sondern sie müßte ebenfalls grösser werden.

L. Fig. 54. habe ich eine Figur gezeichnet, woran man dies sich deutlich machen kann. Macht man aus dem Winkel ABC den Winkel ABE, so wird aus der dritten Seite AC die Linie AE. Nimmt man anstatt des Winkels ABE den Winkel ABF, so erhält man zur dritten Seite die noch grössere AF; und bey dem Winkel ABG wird daraus AG. Aber wird auf eben die Art, wie in der Figur die Linien BE, BF und BG mit der verlängerten Seite AC zusammen kommen oder dieselbe schneiden und dadurch das Dreyeck herstellen, jeder an ihrer Stelle genommene Schenkel des vergrösserten Winkels, wenn man ihn verlängert, ein Dreyeck machen?

S. Ja, warum nicht?

L. Aber wenn nun der Winkel bey B so groß genommen würde, daß er mit dem Winkel

kel A zwey rechte Winkel oder wohl gar noch mehr ausmachte?

S. Nein dann doch nicht, denn sonst wären in einem Dreyecke zwey Winkel so groß oder grösser als zwey rechte, und sie müssen stets kleiner seyn.

L. Wenn also in einem Dreyecke, denn das folgt nunmehr, eine Seite und einer von den daran liegenden Winkeln unverändert bleibt, der andere dieser Winkel aber grösser gemacht wird; so wird dabey, so lange der andere Schenkel dieses wachsenden Winkels, verlängert, die dritte ebenfalls verlängerte Seite trifft, diese dritte Seite ebenfalls jedesmal grösser. Soll ferner bey der gedachten Veränderung ein Dreyeck möglich bleiben, so darf der vergrösserte Winkel mit dem andern an der unveränderten Seite liegenden Winkel nicht so groß und noch weniger grösser seyn als zwey rechte Winkel. — Nun zur Umkehrung des gedachten Satzes!

S. Lassen Sie mich einmal versuchen, ob ich ihn umkehren kann.

L. Sehr gerne; Sie müssen dabey das, was vorhin zu beweisen war, mit unter das bekannte setzen.

S. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten einander gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind; so sind auch die diesen dritten Seiten gegenüber stehende Winkel ungleich.

L. Es muß noch dazu gesetzt werden, daß in demjenigen Dreyecke von den gleichen Seiten der grössere Winkel eingeschlossen wird, welches

die

die grössere dritte Seite hat. — Das war also der Satz; wie stehts mit dem Beweise?

S. Wäre es nicht so; so wären die gedachten Winkel entweder gleich, oder in umgekehrter Ordnung ungleich. Im ersten Falle wären die ganzen Dreyecke gleich, weil sie alsdann zwey gleiche Seiten und einen gleichen von denselben eingeschlossenen Winkel hätten, und dann müßten auch die dritten Seiten, die ungleich seyn sollen, gleich seyn. Im andern Falle aber — hier muß ich eine Figur zu Hülfe nehmen. Wenn also Fig. 51. DBC grösser als CBA seyn sollte, so müßte nach dem vorhergehenden Satze auch DC grösser als AC seyn, und wir haben das Gegentheil angenommen.

L. Gut. Gesetzt also daß in einem Dreyecke BAD Fig. 54. die eine Seite AB, und der eine von den an ihr liegenden Winkeln, BAD, unverändert bleiben, der andere Schenkel dieses unveränderten Winkels hingegen nach und nach in C, E, F, G und so weiter verlängert und die Linien BC, BE, BF, BG und so weiter gezogen werden; was geschieht dann mit dem andern an der unveränderten Seite bey B liegenden Winkel?

S. Er wird mit jeder Verlängerung der Linie AD grösser.

L. Und wenn man nun alles nur sich vorstellen, nicht wirklich thun soll: wie weit kann man sich nach und nach AD verlängert vorstellen?

S. Das

S. Das läßt sich gar nicht bestimmen; man kann, ohne je ein Ende zu finden, in Gedanken immer weiter gehen.

L. Kann man aber auch, man mag sich AD so weit verlängert gedenken als man will, sich doch eine Linie, wie BC, BE, BF, BG und so weiter gedenken?

S. O ja!

L. Also ist es doch wohl möglich, daß durch immer weitere Verlängerung der Seite AD und Ziehung solcher Seiten als BC oder BE u. s. w. der Winkel bey B eine jede Grösse erhalte?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Nur muß er nicht mit dem Winkel A zwey rechte oder gar noch mehr ausmachen sollen, denn alsdann entstände etwas unmögliches.

L. Gut, es wächst also unter den vorhin angeführten Umständen bey jeder Verlängerung der Linie AD der gegenüber stehende Winkel bey B, aber zwey rechte kann er mit dem Winkel A zusammen genommen niemals ausmachen, und noch weniger mehr. — — Sollte nun aber nicht, die gedachten Umstände beybehalten und überdem vorausgesetzt, daß B ntit A zusammen genommen nicht ganz zwey rechte Winkel ausmachen, sondern etwas daran fehlen sollte, B eine jede Grösse erreichen können?

S. Warum nicht? Man kann ja, so lange B noch nicht groß genug ist, die Linie AD noch weiter verlängen, vom Ende der Verlängerung

nach

nach B eine Linie ziehen, und dadurch auch den Winkel B immer noch grösser machen.

L. Angenommen also, daß irgend eine Linie z. B. AB Fig. 54. und zwey Winkel, der Winkel A Fig. 54 und der Winkel o Fig. 55 gegeben sind, so daß die Winkel A und o nicht zwey rechte ausmachen; dies, sage ich, angenommen, ist es, wenn auch noch so wenig an zwey rechten Winkeln fehlt, gleichwohl möglich ein Dreyeck sich zu denken, worin die eine Seite gleich der Linie AB, der eine daran liegende Winkel gleich A und der andere gleich o sey?

S. Ja; eine Seite wie AB kann man sich leicht denken, man kann sie ja selbst ziehen, wenn sie nicht gar zu groß genommen wird. An den einen Endpunkt ferner kann man einen jeden Winkel legen, und also noch leichter sich z. B. an A der Winkel A gedenken. Nun darf man nur eine Linie aus B nach irgend einem Punkte des andern Schenkels von A ziehen, und sich diesen Schenkel immer weiter verlängert und die gehörige Linie gezogen vorstellen, so muß man endlich bey B einen Winkel erhalten, der o gleich ist, wenn auch A und o zusammen genommen noch so wenig kleiner als zwey rechte Winkel seyn sollten.

L. Dies ist ein sehr wichtiger Satz, und wir werden bald davon Gebrauch machen. Heute müßte ich indeß befürchten, daß ich Sie zu sehr angreifen würde, wenn ich noch fortfahren wollte.

Ich

Ich will also hier stehen bleiben, und das, was uns von den allerersten Anfangsgründen der Wissenschaft, womit wir uns jetzt beschäftigen, noch übrig ist, in zwey, höchstens drey der künftigen Unterredungen zu Ende zu bringen suchen.

Sechszehntes Gespräch.

L. Wie viel Sätze haben wir bereits, nach welchen wir bestimmen können, ob zwey Dreyecke gleich sind?

S. Zwey.

L. Welches sind dieselben?

S. Der erste war: Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und der Winkel, welchen diese Seiten einschliessen, gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke gleich, so daß sie sich decken; und der andere: Wenn in zwey Dreyecken alle drey Seiten einzeln genommen einander gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke gleich, so daß sie sich decken.

L. Zu diesen beyden Sätzen können wir nun noch einen dritten setzen, und damit fürs erste die Betrachtung der Dreyecke endigen. Ich meine folgenden. Wenn in zwey Dreyecken irgend eine Seite und zwey gleich liegende Winkel einzeln genommen einander gleich sind, so sind

die ganzen Dreyecke gleich, so daß sie sich decken. — — Gleich liegend werden hier die Winkel genannt, wenn sie entweder beyde an der gleichen Seite liegen, oder Einer derselben dieser gleichen Seite gegenüber steht. — — Wir wollen diesen Satz auf die Art durchnehmen, als wir neulich uns gemerkt haben, daß die Lehrsätze durchgenommen werden müssen. Wovon müssen wir also anfangen?

S. Wir müssen uns den Lehrsatz vor allen andern an einer Figur deutlich machen.

L. Wir wollen also dazu die 56ste und 57ste Figur nehmen, und was müssen wir uns nun davon vorstellen?

S. Erstlich, daß eine Seite in beyden Dreyecken gleich sey, z. B. AB gleich DE.

L. Ferner in Ansehung der Winkel?

S. Hier giebt es zwey Fälle. Entweder liegen beyde Winkel an der gleichen Seite, wenn nemlich A gleich D, und B gleich E; oder Einer von ihnen steht der gleichen Seite gegenüber, wenn nemlich A gleich D, und C gleich F ist.

L. Wir haben also auch einen doppelten Beweis zu führen. Um von dem ersten Falle anzufangen wenn nemlich die Seite AB gleich der Seite DE, der Winkel A gleich dem Winkel D und der Winkel B gleich dem Winkel E ist; so überlegen Sie einmal, was Sie ausserdem noch von beyden Dreyecken wissen müßten, um nach dem ersten Satze von der Gleichheit

der

der Dreyecke von ihnen zu behaupten, daß sie gleich sind?

S. Wenn ich wüßte, daß auch die Seite BC gleich der Seite EF wäre, so wären in beyden Dreyecken zwey Seiten und der Winkel, den diese Seiten einschliessen gleich, und die Dreyecke müßten sich decken.

L. Können denn nun wohl bey den vorhin angenommenen Stücken diese Seiten BC und EF ungleich seyn?

S. Ich will einmal annehmen, daß BC grösser wäre als EF. Alsdann könnte man von BC ein Stück abschneiden, das so groß wäre als EF, z. B. BG Fig. 58, und die Linie AG ziehen. Nun müßte das Dreyeck BAG Fig. 58 gleich seyn dem Dreyecke DEF Fig. 57; denn BA wäre gleich DE, BG gleich EF und der Winkel B gleich dem Winkel E Folglich wäre der Winkel BAG gleich dem Winkel D, weil sie den gleichen Seiten BG und EF gegenüber stünden; und da der ganze Winkel A, oder BAC, gleich ist dem Winkel D, so müßten auch BAC und BAG einander gleich seyn, welches unmöglich ist. BC kann also nicht grösser seyn als EF. Gesetzt nun die Seite BC wäre kleiner als die Seite EF, so könnte ich sie durch Verlängerung z. B. bis in I Fig. 59. der Seite EF gleich machen. Wenn ich aber nun auf eine ähnliche Art schliesse als vorhin, so komme ich endlich darauf, daß der Winkel BAI gleich dem Winkel BAC, und auch das ist unmöglich. Es muß also

die Seite BC gleich seyn der Seite EF, weil sie weder gröſſer noch kleiner seyn kann.

L. Sie hätten diesen Beweis noch etwas kürzer fassen können, wenn Sie gesagt hätten: Gesetzt BC und EF wären nicht gleich, so müßte eine von ihnen gröſſer seyn. Es sey also BC gröſſer, u. s. w. Nun hätten Sie den zweyten Theil Ihres Beweises nicht nöthig gehabt. Suchen Sie hievon bey dem andern Falle Gebrauch zu machen. Dieser Fall ist nemlich?

S Wenn AB gleich DE, A gleich D, und C gleich F ist.

L. Wie beweisen Sie nun auf eine ähnliche Art, daß das ganze Dreyeck ABC auch gleich sey dem ganzen Dreyecke DEF.

S. Ich beweise nur noch von den Seiten AC und DF, daß sie einander gleich sind.

L. Und wie?

S Gesetzt sie wären ungleich, so wäre die eine gröſſer als die andere. Es sey AC gröſſer als DF, so kann ich von AC ein Stück z. B. AG Fig. 60 abschneiden, welches DF gleich ist, und die Linie BG ziehen. Nun wären die Dreyecke ABG Fig. 60. und DEF Fig. 57. einander gleich, weil AB gleich DE, AG gleich DF, und A gleich D wäre. Folglich wäre der Winkel AGB gleich dem Winkel F, und da der Winkel C gleich ist dem Winkel F, der Winkel AGB auch gleich dem Winkel C. Dies ist aber unmöglich weil AGB gröſſer seyn muß als C, denn AGB ist ein äusserer Winkel des Dreyecks

BGC, worin die Seite CG verlängert ist, und C der ihm darin gegenüber stehende. Es muß also auch hier AC gleich seyn DF, und also sind die ganzen Dreyecke ABC und DEF einander gleich und decken sich.

L. Nun haben wir also drey Sätze, nach welchen wir uber die Gleichheit zweyer Dreyecke urtheilen können. Von dem lezten wollen wir noch suchen, eine Anwendung zu machen. — Denken Sie einmal Fig. 54 die Linien BD, BC, BE und BF weg, und stellen Sie Sich vor, als wenn daselbst bloß das Dreyeck ABG stünde. In der 61sten Figur sehen Sie eine Linie DE, welche so groß ist, als die AB Fig. 54, und die Winkel D und E sind daselbst auch so groß gemacht als die Winkel B und A Fig. 54. Gesetzt nun, daß ich Fig. 61 die nicht gemeinschaftlichen Schenkel der Winkel D und E, nemlich DF und EG, verlängerte, würden dieselben endlich in einem Punkte zusammen kommen? oder wäre es möglich, daß sie, auch noch so weit verlängert, doch niemals sich träfen?

S. Sie müssen, wenn man sie so weit verlängern kann als man will, endlich zusammen kommen.

L. Aber wie würden Sie mich zu überzeugen suchen, wenn ich es entweder noch nicht einsähe, oder Ihnen nicht zugeben wollte?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Das weiß ich nicht.

L. Wann sind nach dem vorhin durchgenommenen Satze zwey Dreyecke gleich, so daß sie sich decken?

S. Wenn darin irgend eine Seite und zwey gleich liegende Winkel einzeln genommen einander gleich sind?

L. Diesen Satz nun als bewiesen vorausgesetzt, und angenommen, daß Fig. 56 und 57. AB gleich DE, A gleich D, und B gleich E sey; so behaupten Sie von den beyden Dreyecken ABC und DEF Fig. 56. und 57?

S. Daß sie so gleich sind, daß sie sich decken.

L. Gesetzt es wäre bloß Fig. 56. das Dreyeck ABC ganz gezeichnet, von dem Dreyecke DEF Fig. 57. aber wäre nichts da, als die Seite DE und die Winkel D und E, so, daß nur der Anfang ihrer nicht gemeinschaftlichen Schenkel gezogen wäre; könnten Sie dann auch den gedachten Satz anwenden?

S. Nein; denn alsdann wären ja keine zwey Dreyecke da.

L. Aber die nicht gemeinschaftlichen Schenkel der Winkel D und E, Fig. 57, verlängert gedacht, müßte da nicht ein Dreyeck wie DEF entstehen? und könnten Sie unter den angenommenen Bedingungen nicht wenigstens sagen: Das Dreyeck ABC Fig. 56 ist gleich dem Dreyecke DEF, welches entstehen muß, so bald man die nicht gemeinschaftlichen Schenkel der Winkel D und E verlängert?

S. Aber

S. Aber wenn es nun möglich wäre, daß diese Schenkel, verlängert, nicht zusammen kämen?

L. Gut, es sey möglich. Wenn Sie nun unter der Voraussetzung, daß AB gleich, DE. A gleich D und B gleich E ist, DE auf AB so legen, daß die Punkte D und A zusammen fallen; wo fällt dann der Punkt E hin?

S. Auf B, denn AB und DE sind gleich.

L. Und wo werden die nicht gemeinschaftlichen Schenkel der Winkel D und E, welche Theile von den Seiten DF und EF, Fig. 57, sind, hinfallen?

S. Der Schenkel des Winkels D wird auf AC, und der Schenkel des Winkels E auf BC fallen.

L. Also hat nunmehr der Schenkel des Winkels D mit der Seite AC, und der Schenkel des Winkels E mit der Seite BC mehrere Punkte gemein, und können nun wohl diese beyden Schenkel, verlängert, irgendwo ausser AC und BC fallen? AC und BC können Sie Sich dabey ebenfalls verlängert gedenken.

S. Nein.

L. So bald zwey gerade Linien mehr als einen Punkt mit einander gemein haben, so fallen sie durchaus zusammen, denn es ist auf diese Art ihre Richtung bestimmt, und jede gerade Linie hat nur eine Richtung. — Müssen nun also, da AC und BC in einem Punkte zusammen kommen, solches nicht auch die gedachten

ten Schenkel der Winkel D und E, gehörig verlängert, thun?

S Ja.

L. Also nun wieder zur ersten Figur. DE ist daselbst gleich der Seite AB in dem Dreyecke ABG Fig. 54, der Winkel E gleich dem Winkel A Fig. 54, und der Winkel D gleich dem Winkel bey B Fig. 54. Gesetzt ich verlängerte Fig. 61 die Schenkel DF und EG; was müßte geschehen?

S Wenn man DE Fig. 61 auf die Seite AB des Dreyecks ABG Fig. 54. so legt, daß D auf B liegt, so fällt einmal der Punkt E auch auf A, weil DE und BA gleich sind, und ferner DF auf BG, und EG auf AG, weil auch die Winkel D und B, desgleichen E und A gleich sind. Nun hat der Schenkel DF mit der Seite BG und der Schenkel EG mit der Seite AG mehrere Punkte gemein, und wenn man also, wie weit man auch will, alle diese Linien verlängert, so fällt DF durchaus mit BG, und EG durchaus mit AG zusammen. Da sich nun BG und AG in dem Punkte G treffen, so müssen auch DF und EG verlängert endlich zusammen kommen.

L. Gesetzt nun, daß anstatt DE Fig. 61. irgend eine andere Linie, eine grössere oder kleinere, gegeben wäre, sie soll auch DE heissen, und es lägen daran ebenfalls zwey Winkel D und E, wie Fig. 61, man wüßte aber von diesen beyden Winkeln nichts, als daß beyde zusammen genommen kleiner wären, als zwey

rechte Winkel; könnte man gleichwohl von den Schenkeln DF und EG behaupten, daß sie verlängert endlich einander schneiden und mit DE ein Dreyeck machen würden?

S. Ja; denn ich könnte ja nach dem, was Sie bey unserm lezten Gespräche mit mir durchgenommen haben, ein Dreyeck machen, worin die eine Seite gleich der Linie DE und die beyden daran liegenden Winkel gleich den Winkeln D uud E (Fig. 61) wären. So bald aber ein solches Dreyeck da ist, so ist auch bewiesen, daß DF und EG verlängert zusammen kommen, und mit DE ein Dreyeck machen müssen.

L. Wenn nun aber die beyden Winkel D und E zusammen genommen zwar kleiner wären als zwey rechte, abet der Unterschied wäre ausserordentlich klein?

S. Das thut nichts; wir nahmen dies auch neulich schon an.

L. Fig. 62 sind zwey gerade Linien AB und CD gezogen. Was meinen Sie, werden sich diese beyden Linien, verlängert, einander schneiden, oder zusammen kommen, denn das ist eins?

S. Das weiß ich noch nicht.

L. Kommen Fig. 61. die Linien DF und EG, verlängert, zusammen?

S. Ja, wenn nemlich, wie vorhin, D und E kleiner als zwey rechte sind.

L. Denken Sie darauf, Sich bey der vorgelegten Frage durch das gelernte zu helfen.

S. Also muß ich wohl die Linie AC ziehen?

L. Thun Sie es. (Es geschieht und es entsteht die 63ste Figur.) Wissen Sie nun, ob AB und CD, verlängert, zusammen kommen werden?

S. Nein noch nicht; wenn aber die Winkel A und C zusammen genommen kleiner sind als zwey rechte, dann kommen AB und CD zusammen.

L. Und zwar nach was für einer Seite?

S. Nach der Seite von B und D.

L. Gesetzt Sie hätten anstatt AC die Linie EF Fig. 64, oder GH Fig. 65 gezogen, und wüßten in beyden Fällen, daß die Winkel o und x zusammen kleiner als zwey rechte Winkel wären; was wären Sie auch dann im Stande zu behaupten?

S. Daß AB und CD verlängert nach der Seite von B und D zusammen kommen würden.

L. Wie liegen die Winkel A und C Fig. 63, oder o und x Fig. 64 und 65? auf einer oder auf zwey Seiten der Linie AC, oder EF, oder GH?

S. Auf einer Seite.

L. Innerhalb der Linien AB und CD oder nicht.

S. Innerhalb.

L. Wie kann man sie also nennen?

S. Innere auf einer Seite liegende Winkel.

L. Wenn werden also zwey gerade Linien, verlängert, sich schneiden?

S. Wenn, indem sie von einer dritten irgendwo geschnitten werden, die beyden innern auf einer Seite liegenden Winkel zusammen genommen kleiner sind als zwey rechte Winkel.

L. Und was muß ich also thun, um zu erforschen, ob zwey gegebene gerade Linien, verlängert, sich endlich schneiden werden?

S. Ich muß durch sie eine dritte Linie ziehen, und sehen ob die beyden innern auf einer Seite liegende Winkel kleiner als zwey rechte Winkel sind.

L. Wir werden dies oft zu thun haben; prägen Sie Sich daher das nöthige Verfahren gut ein. — — Nun muß ich Ihnen verschiedene Fragen vorlegen, deren Beantwortung Sie Sich wegen des folgenden recht geläufig machen müssen; beantworten aber werden Sie sie können, denn alles dazu nöthige ist da gewesen. Diese Fragen sind

1. Wenn kann man von zwey Dreyecken behaupten, daß sie einander gleich sind, so daß sie sich decken?

2. Wenn weiß man mit Gewisheit von zwey geraden Linien, daß sie gleich sind?

3. Wenn ist man im Stande eben dieses von zwey geradlinigen Winkeln zu behaupten?

4. Wenn sind zwey gerade Linien ungleich?

5. Wenn sind zwey geradlinige Winkel ungleich?

6. Wenn sind zwey gerade Linien zusammen genommen grösser als eine dritte?

7. Wenn sind zwey geradlinige Winkel zusammen genommen kleiner als zwey rechte Winkel?

8. Wenn sind zwey gerade Linien zusammen genommen grösser als zwey andere gerade Linien ebenfalls zusammen genommen?

9. Wenn ist es unmöglich, daß zwey gerade Linien, die durch eine dritte verbunden sind, verlängert auf der andern Seite endlich zusammen kommen?

10. Wenn kommen zwey gerade Linien, verlängert, endlich in einem Punkte zusammen?

(Bey der einzeln Durchnehmung dieser Fragen fand der Lehrling nicht gleich alle Antworten, ausserdem brachte er diejenigen, die er fand, nicht allezeit in der erforderlichen Ordnung vor. Ich halte es nicht für nöthig, die der deswegen nöthigen Verbesserung willen angestellten Unterredungen ganz herzusetzen, einige Anmerkungen, die unten folgen, werden ihre Beschaffenheit hinlänglich darstellen. Der Lehrling erhielt am Ende dieses Gesprächs die angeführten Fragen aufgesetzt, mit dem Auftrage, sie nun auch schriftlich zu beantworten. Der darauf gelieferte Aufsatz war nach verschiedenen Zusätzen folgender.)

Erste Frage.

Wenn kann man von zwey Dreyecken behaupten, daß sie einander gleich sind, so daß sie sich decken?

Ant-

Antwort.

1. Wenn darin zwey Seiten und der Winkel, den diese Seiten einschliessen, gleich sind.

2. Wenn alle Seiten derselben einander gleich sind.

3. Wenn darin eine Seite und zwey gleich liegende Winkel gleich sind.

Zweyte Frage.

Wenn weiß man mit Gewisheit, von zwey geraden Linien, daß sie gleich sind?

Antwort.

1. Wenn sie sich decken.

2. Wenn beyde einer dritten gleich sind.

3 Wenn sie Halbmesser eines Kreises sind.

4. Wenn sie in gleichen Dreyecken, die sich decken, gleichen Winkeln gegenüber stehen.

5 Wenn sie in einem Dreyecke, das zwey gleiche Winkel hat, diesen gleichen Winkeln gegenüber steyen.

6. Wenn sie Seiten eines gleichwinkligen Dreyecks sind.

Dritte Frage.

Wenn ist man im Stande, von zwey geradlinigen Winkeln zu behaupten, daß sie gleich sind?

Antwort.

1. Wenn sie sich decken.

2. Wenn beyde einem dritten gleich sind.

3. Wenn

3. Wenn sie rechte Winkel sind.

4. Wenn sie in gleichen Dreyecken, die sich decken, gleichen Seiten gegenüber stehen.

5. Wenn sie die Winkel über der Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreyecke sind.

6. Wenn sie Winkel unter der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks sind, in welchem die Schenkel verlängert worden.

7. Wenn sie Winkel eines gleichseitigen Dreyecks sind.

8. Wenn sie Verticalwinkel sind.

Vierte Frage.

Wenn sind zwey gerade Linien ungleich?

Antwort.

1. Wenn die eine ein Theil der andern ist.

2. Wenn sie in Einem Dreyecke zwey ungleichen Winkeln gegenüber stehen; und zwar ist diejenige die grössere, welche dem grössern Winkel, und diejenige die kleinere, welche dem kleinern Winkel gegenüber steht.

3. Wenn sie die dritten Seiten von zwey Dreyecken sind, deren übrige Seiten gleich sind, aber ungleiche Winkel einschliessen; und zwar ist diejenige die grössere, welche die dritte Seite des Dreyecks ist, in welchem die übrigen Seiten den grössern Winkel einschliessen.

Fünfte Frage.

Wenn sind zwey geradlinige Winkel ungleich?

Antwort.

1. Wenn der eine ein Theil des andern ist.

2. Wenn der eine ein äusserer und der andere ein innerer gegenüber stehender Winkel eines Dreyecks ist, in welchem eine Seite verlängert worden; und zwar ist der äussere der grössere.

3. Wenn sie in Einem Dreyecke zwey ungleichen Seiten gegenüber stehen; und zwar ist derjenige der grössere, welcher der grössern Seite gegenüber steht.

4. Wenn der eine von zweyen in einem Punkte innerhalb eines Dreyecks aus den beyden Endpunkten einer Seite desselben zusammen gezogenen Linien, und der andere von den beyden übrigen Seiten des Dreyecks eingeschlossen wird; und zwar ist jener der grössere.

5. Wenn sie in zwey Dreyecken, worin zwey Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, von den gleichen Seiten eingeschlossen werden; und zwar ist derjenige der grössere, welcher sich in dem Dreyecke befindet, das die grössere dritte Seite hat.

Sechste Frage.

Wenn sind zwey gerade Linien zusammen genommen grösser als eine dritte?

Antwort.

Wenn sie mit dieser dritten drey Seiten Eines Dreyecks sind.

Sie-

Siebente Frage.

Wenn sind zwey geradlinige Winkel zusammen genommen kleiner als zwey rechte Winkel?

Antwort.

Wenn sie zwey Winkel Eines Dreyecks sind.

Achte Frage.

Wenn sind zwey gerade Linien zusammen genommen grösser als zwey andere Linien ebenfalls zusammen genommen?

Antwort.

Wenn sie zwey Seiten eines Dreyecks, und die beyden andern zwey Linien sind, die aus den beyden Endpunkten der dritten Seite dieses Dreyecks innerhalb desselben in einem Punkte zusammen gestellt worden.

Neunte Frage.

Wenn ist es unmöglich, daß zwey gerade Linien, die durch eine dritte verbunden sind, verlängert auf der andern Seite zusammen laufen?

Antwort.

Wenn die beyden innern auf einer Seite liegenden Winkel zwey rechten Winkeln gleich sind.

Zehnte Frage.

Wenn kommen zwey gerade Linien, verlängert, endlich in einem Punkte zusammen?

Ant-

Antwort.

Wenn, indem sie von einer dritten geschnitten werden, zwey innere auf einer Seite liegende Winkel zusammen genommen kleiner als zwey rechte Winkel sind.

(Ueber die in den Antworten enthaltene Sätze wurden auch bey dieser Gelegenheit verschiedene Wiederholungen angestellt, und zugleich manche derselben in solche Regeln verwandelt, als in den Unterredungen mehrere da gewesen.)

Siebenzehntes Gespräch.

L. Ehe wir nun weiter zu Lehrsätzen oder Aufgaben fortgehen können, müssen wir uns noch verschiedene Arten von Winkeln, und eine gewisse Art gerader Linien bekannt machen. Die Winkel finden sich bey zwey geraden Linien, die von einer dritten geschnitten werden, und sind: Wechselwinkel, und, äussere und innere gegenüber stehende Winkel. Ich müßte dazu auch die innern auf einer Seite liegenden Winkel setzen; allein diese sind Ihnen schon bekannt. Betrachten Sie also die 66ste Figur. Welche Winkel scheinen Ihnen da Wechselwinkel zu seyn?

S. Was heißt denn die Benennung, Wechselwinkel eigentlich? Ich verstehe diesen Ausdruck noch nicht.

L. Zwey Winkel heissen Wechselwinkel, wenn sie in Ansehung ihrer Lage verschieden sind, der eine oben und der andere unten, der eine auf der rechten und der andere auf der linken Seite liegt, und in dem gegenwärtigen Falle überdem beyde entweder äussere oder innere Winkel sind.

S. Also sind die Winkel o und t, x und n, y und m, z und r Wechselwinkel, denn von diesen liegt immer der eine oben und der andere unten, der eine auf der rechten und der andere auf der linken Seite der Linie EF.

L. Recht. Nun nennen Sie mir einmal einen äussern Winkel?

S. Der Winkel o ist einer.

L. Was für ein innerer steht demselben wohl gegenüber.

S. Der Winkel r.

L. Also sind o und r ein innerer und ein äusserer gegenüber stehender Winkel. Sehen Sie nicht noch mehr äussere und innere gegenüber stehende Winkel in der 66sten Figur.

S. Ja, x und m, n und y, t und z.

L. Innere auf einer Seite liegende Winkel wären hier?

S. y und r, z und m.

L. Die nöthigen Winkel kennten Sie also; die erforderlichen Linien werden Ihnen nicht schwerer zu fassen seyn. Es sind solches die Parallellinien, oder die gleichlaufende Linien. Man versteht darunter gerade Linien, die weder

auf der einen noch auf der andern Seite, so weit man sie auch verlängern mag, zusammen treffen. Eine genaue Kenntniß dieser Parallellinien ist in der Mathematic von der größten Wichtigkeit, und wir wollen uns daher dieselbe zu verschaffen suchen. Die erste Frage dabey ist: Wenn sind zwey gerade Linien parallel, oder so beschaffen, daß sie, so weit man sie auch verlängert, nie zusammen laufen? Wir wollen zuerst einen bestimmten Fall nehmen. Unter was für Umständen sind wohl die Linien AB und CD Fig. 62 so beschaffen, daß sie, auch noch so weit verlängert, doch nie zusammen kommen?

S. Das weiß ich. AB und CD sind parallel, wenn, indem man sie durch eine dritte Linie, AC, z. B. Fig. 63, oder EF Fig. 64, verbindet, oder durch dieselbe schneidet, wie z. B. durch GH Fig. 65, die zwey innere auf einer Seite liegende Winkel z. B. A und C, Fig. 63, oder o und x, Fig. 64. 65, zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind.

L. Alsdann können allerdings die Linien AB und CD auf der Seite von B und D niemals zusammen kommen. Allein wenn sie auf der andern Seite zusammen laufen könnten, so wären es deswegen doch keine Parallellinien. Vielleicht ist dies möglich?

S. Daran habe ich nicht gedacht.

L. Aber angenommen, daß o und x, Fig.

64 und 65, zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind; können alsdann wohl die beyden auf der andern Seite liegende innere Winkel kleiner oder grösser seyn als zwey rechte Winkel?

S. Das weiß ich nicht.

L. Wir wollen, um die Winkel bequem benennen zu können, die 66ste Figur betrachten. Wie groß ist daselbst y und z zusammen genommen?

S. Gleich zwey rechten Winkeln.

L. Und r und m zusammen genommen?

S. Auch gleich zwey rechten Winkeln, denn sie sind, eben sowohl als y und z, Nebenwinkel.

L. Wie viel rechten Winkeln sind also y und z und r und m zusammen genommen gleich?

S. Vier rechten Winkeln.

L. Angenommen also, daß y und r zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind; wie groß müssen z und m zusammen seyn?

S. Ebenfalls gleich zwey rechten Winkeln. Nun ist leicht zu beurtheilen, daß AB und CD, Fig. 64 und 65, auch auf der Seite von A und C nicht zusammen kommen können. Wenn o und x zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind, so sind es die beyden auf der andern Seite liegende innere Winkel auch, und deswegen ists unmöglich.

L. Warum unmöglich?

S. Sonst machten sie mit EF ein Dreyeck, und es wären darin zwey Winkel zwey rechten gleich,

gleich, da doch in jedem Dreyecke jede zwey Winkel kleiner als zwey rechte Winkel seyn müssen.

L. So hätten wir also ein Kennzeichen der Parallellinien. Es giebt indeß noch andere, die wir ebenfalls uns bekannt machen müssen. Sollte man nicht auch zeigen können, daß die Linien AB und CD Fig. 66 parallel seyn müssen, oder auf keiner Seite zusammen kommen können, so bald zwey Wechselwinkel z. B. y und m gleich sind?

S. Wie sollte das daraus folgen?

L. Gesetzt AB und CD liefen auf der einen oder der andern Seite zusammen; so machten sie mit dem Stücke von EF, das zwischen ihnen liegt, was für eine Figur?

S. Ein Dreyeck.

L. Und kämen sie auf der Seite von B und D zusammen, so wäre y, da eine Seite des Dreyecks verlängert worden?

S. Nun sehe ichs schon; y wäre ein äusserer Winkel eines Dreyecks und m ein innerer ihm gegenüber stehender, und y also grösser als m, und beyde sollen gleich seyn. Also können AB und CD auf dieser Seite nicht zusammen kommen.

L. Etwa aber auf der andern Seite?

S. Auch da nicht. Denn geschähe dies, so entstünde wieder ein Dreyeck mit verlängerten Seiten, und nun wäre m der äussere und y der innere gegenüber stehende Winkel, und m

müßte also grösser seyn als y, und es sollen doch beyde gleich seyn.

L. Gesetzt nun daß z gleich r wäre?

S. Auch dann könnten die Linien AB und CD nicht zusammen kommen, sondern müßten parallel seyn. Denn kämen sie auf der einen oder der andern Seite zusammen; so machten sie mit dem Stücke von EF, das zwischen ihnen liegt, ein Dreyeck, dessen zwey Seiten verlängert wären, und nun wären von den Winkeln z und r der eine ein äusserer, und der andere ein innerer gegenüber stehender Winkel, und also ungleich, da sie doch gleich seyn sollen.

L. Wie aber, wenn die Wechselwinkel o und r gleich wären?

S. Dann wären auch ihre Verticalwinkel z und r gleich, und wenn z und r gleich sind, so sind AB und CD parallel.

L. Und wenn x und n gleich sind?

S. Dann sind die Linien AB und CD ebenfalls parallel; denn es sind alsdann auch y und m, die Verticalwinkel von x und n, gleich.

L. Was für ein Kennzeichen der Parallellinien haben wir also auch nun? oder: Wenn können wir nun auch sagen, daß zwey gerade Linien parallel sind?

S. Wenn zwey Wechselwinkel gleich sind.

L. Dieses Kennzeichen der Parallellinien betrachtet man oft als das erste, und führet daraus alle andere zurück. So bald dasselbe nemlich ausgemacht ist, hat man nur nöthig

zu

zu zeigen, daß unter gewissen Umständen dasselbe ebenfalls statt finden, oder zwey Wechselwinkel sich gleichen müssen, uud dann ist ausgemacht, daß unter diesen Umständen parallele Linien da sind. Benutzen Sie dies, und sagen Sie mir, ob zwey gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, AB und CD z. B. 66, nicht auch parallel seyn müssen, wenn ein äusserer Winkel gleich ist seinem innern gegenüber stehenden? o z. B. gleich r?

S. Ja; denn alsdann sind auch die Wechselwinkel z und r einander gleich, weil o gleich z, seinem Verticalwinkel, ist, und also die Linien AB und CD parallel.

L. Ist es auch gleichviel, was für ein äusserer Winkel mit seinem innern gegenüberstehenden gegeben ist?

S. Ja, denn man kann immer anstatt des äussern Winkels seinen Verticalwinkel setzen, und so erhält man jedesmal zwey gleiche Wechselwinkel. Ist z. B. x gleich m, so ist auch y gleich m, weil x und y als Verticalwinkel gleich sind; ist n gleich y, so ist auch m gleich y, weil n und m als Verticalwinkel gleich sind, und auf eine ähnliche Art ist z und r gleich, wenn t und z gleich sind.

L. Es sind also nun auch zwey gerade Linien parallel, wenn, indem sie von einer dritten geschnitten werden, irgend ein äusserer Winkel gleich ist seinem innern gegenüber stehenden. Nun versuchen Sie auch das Kennzeichen, wel-

welches Sie als das erste angeführt haben, auf eine ähnliche Art zu erweisen

S. Das ist nicht schwer. Denn wenn z und m zwey rechten Winkeln gleich sind, so sind auch y und m einander gleich, weil jeder alsdann so groß ist als zwey rechte Winkel weniger z. Ist aber y und r zwey rechten Winkeln gleich, so sind wieder y und m gleich, weil ein jeder so groß ist als zwey rechte Winkel weniger r.

L. So leicht als sich die übrigen Kennzeichen der Parallellinien auf das zurückführen lassen: Zwey gerade Linien sind parallel, wenn, indem sie von einer dritten geschnitten werden, zwey Wechselwinkel gleich sind; läßt sich das Zurückführen nicht thun, wenn man dasjenige als das erste annimmt, wovon Sie ausgehen wollten. Merken Sie Sich also die beobachtete Ordnung, und führen Sie in derselben noch einmal die Kennzeichen der Parallellinien an.

S. Zwey gerade Linien sind parallel, wenn, indem sie von einer dritten geschnitten werden, entweder

1. zwey Wechselwinkel gleich sind; oder
2. ein äusserer Winkel gleich ist seinem innern gegenüber stehenden; oder
3. zwey innere auf einer Seite liegende Winkel zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind.

L. Merken Sie Sich diese Kennzeichen ja wohl, Sie werden künftig oft davon Gebrauch machen

machen können. — Wie werden nun aber wohl, wenn zwey Parallellinien von einer dritten geschnitten werden.

1. die Wechselwinkel gegen einander.
2. ein äusserer Winkel gegen seinen innern gegenüber stehenden, und
3. die beyden auf einer Seite liegende innern Winkel gegen zwey rechte Winkel gehalten, beschaffen seyn?

Ich will mich an der 67sten Figur bestimmter erklären. Wenn vorausgesetzt werden kann, daß die Linien IK und LM in dieser Figur parallel sind, und NO sie schneidet; wie sind dann

1. die Wechselwinkel r und v, s und t, m und z, n und x beschaffen?
2. wie die äussern Winkel mit ihren gegenüberstehenden innern verglichen; nemlich m und t, n und v, x und r, z und s?
3. wie endlich die beyden innern auf einer Seite liegende Winkel, nemlich r und t zusammen genommen, und s und v ebenfalls zusammen genommen?

S. Wie die beyden innern auf einer Seite liegende Winkel, zusammen genommen, beschaffen sind, will ich wohl sagen: Sie sind so groß als zwey rechte Winkel. Denn wäre dies nicht, so müßte ein Paar dieser innern Winkel kleiner, und das andere Paar grösser seyn als zwey rechte Winkel, weil beyde Paar zusammen genommen vier rechten Winkeln gleich sind. Wäre aber dies, so müßten die Linien IK und

LM Fig. 67 auf der Seite, wo das kleinere Paar innere Winkel läge, nach dem Satze, den wir zulezt gehabt haben, (im vorhergehenden Gespräche am Ende) zusammen kommen, und sie sollen parallel seyn, also nie zusammen treffen. Es können also die beyden Paare innere an einer Seite liegende Winkel nicht ungleich, sondern sie müssen gleich, und jedes also auch so groß als zwey rechte Winkel seyn.

L. Sie haben den gebrauchten Satz gut behalten und angewandt. Sollten Sie nicht aber auch vermittelst desselben beweisen können, daß, wenn zwey Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, die Wechselwinkel gleich seyn müssen? Versuchen Sie einmal zu zeigen, daß ein Paar innere an einer Seite liegende Winkel kleiner seyn müsse als zwey rechte Winkel, so bald die Wechselwinkel ungleich sind. Jenes kann nicht statt finden, so bald die angenommene Linien parallel sind, und ist also das leztere damit unzertrennlich verbunden, so kann es, wenn die gedachten Linien parallel seyn sollen, natürlicher Weise eben sowenig statt haben.

S. Wenn zwey Wechselwinkel, z. B. s und t, Fig. 67, ungleich sind, so ist der eine grösser als der andere. Gesezt nun daß t grösser als s ist, so sind t und v, als zwey Nebenwinkel, zwey rechten Winkeln gleich. Da nun aber t grösser ist als s, so ist s und t nicht so groß als zwey rechte Winkel sondern kleiner, und es müßten also die Parallellinien IK und

LM,

LM, wenn die Wechselwinkel s und t nicht gleich wären, auf der Seite dieser Winkel zusammen laufen, und das ist unmöglich. Es sind also die Wechselwinkel s und t einander gleich.

L. Sollten Sie nicht, indem Sie dies voraussetzen, leicht zeigen können, daß, wenn zwey Parallellinien z. B. IK und LM, Fig. 67, von einer dritten NO geschnitten werden, der äussere Winkel, z. B. m, gleich sey seinem innern gegenüber stehenden Winkel t?

S. Ja. Wenn die Linien IK und LM parallel sind und von der Linie NO geschnitten werden; so sind die Wechselwinkel t und s einander gleich. Ist aber dies, so müssen auch die Winkel t und m gleich seyn, indem s und m, zwey Verticalwinkel, gleich sind, und also anstatt des Winkels s der Winkel t gesetzt werden kann.

L. Und nun noch einmal vorausgesetzt, daß bey den beyden Parallellinien IK und LM, die von der dritten NO geschnitten werden, die Wechselwinkel s und t einander gleich sind; was folgt für die beyden innern auf einer Seite liegende Winkel s und v, oder t und r?

S. Jede zwey sind zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich. Denn erstlich sind t und v zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich. Wenn nun t gleich s ist, so müssen auch s und v zusammen zwey rechten Winkeln gleich seyn. Zweytens machen auch r und s zwey rechte Winkel aus. Wenn nun auch s gleich t ist, so müssen auch

r und t zusammen zwey rechten Winkeln gleich seyn.

L. Auch bey diesen Sätzen ist es am vortheilhaftesten, wenn man von den Wechselwinkeln anfängt, dann zu den äussern und innern gegenüber stehenden Winkeln fortgeht, und am Ende erst zu den innern auf einer Seite liegenden Winkeln kommt. Wiederholen Sie in dieser Ordnung diese Sätze nun noch einmal.

S. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geschnitten werden; so sind

1. die Wechselwinkel einander gleich;
2. der äussere Winkel ist gleich dem innern ihm gegenüber stehenden;
3. die beyden innern auf einer Seite liegende Winkel sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich.

L. Auch dies sind sehr wichtige Sätze, deren Anwendung uns vieles entdecken wird. Jetzt ein Paar Folgerungen daraus. — Wie steht Fig. 68, wenn daselbst einmal die Linien AB und CD parallel sind, und zweytens aus dem Punkte E in der einen Linie AB, auf die andere CD eine senkrechte Linie EF gezogen ist; wie steht, frage ich, diese Linie EF auf der Linie AB? oder, denn dies ist einerley, wie groß ist der Winkel BEF?

S. Der Winkel BEF muß ein rechter seyn; denn DFE ist ein rechter Winkel, und DFE und BEF sind zusammen genommen zwey rechten Win-

Winkeln gleich. Die Linie FE steht also auf der Linie AB senkrecht.

L. Wenn also eine gerade Linie zwischen zwey Parallelen auf der einen senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf der andern. — Wenn ich nun aber durch die Linie AB in dem Punkte E Fig. 68, so wie die 69ste Figur es zeigt, eine gerade Linie GH zöge, so daß AB und GH sich schnitten; wie groß wären dann die Winkel CFE und HEF zusammen genommen?

S. Kleiner als zwey rechte Winkel.

L. Und was müßte also geschehen, wenn ich GH und FC gehörig verlängerte?

S. Sie müßten zusammen kommen und einander schneiden.

L. Wenn also zwey Parallellinien gegeben sind, und es schneidet eine dritte Linie die eine davon; was muß geschehen, wenn man diese dritte Linie und die andere Parallellinie gehörig verlängert?

S. Es müssen sich diese beyden Linien schneiden.

L. Recht; denn man kann aus dem gegebenen Schneidungspunkte der einen Parallellinie auf die andere eine senkrechte Linie ziehen, und alsdann entsteht jedesmal eine Figur, welche der 69sten ähnlich ist, und worauf sich also auch das davon behauptete anwenden läßt. Fig. 70 sind drey gerade Linien AB, CD und EF gezogen. Wir wollen davon annehmen,

daß

daß AB und CD erstlich, und dann auch CD und EF parallel sind. Ist es allezeit möglich, dergleichen drey Linien durch eine und eben dieselbe vierte Linie zu schneiden?

S. Ja; denn wenn Fig. 70 die Linie GH so gezogen worden ist, daß sie die beyden Linien AB und CD schneidet, so muß sie, da sie von den beyden Parallelen CD und EF die eine CD schneidet, verlängert auch die andere EF schneiden.

L. Sollte sich nun nicht auch beweisen lassen, daß jede zwey gerade Linien, die mit einer dritten parallel sind, auch unter einander parallel seyn müssen? Betrachten Sie die 71ste Figur. Gegeben ist darin, daß AB parallel CD, und CD parallel EF ist. Ausserdem sind alle drey Linien durch eine und dieselbe vierte Linie GHI geschnitten worden, wovon wir so eben gesehen haben, daß es allezeit möglich ist.

S. Ja AB und EF sind bey diesen Voraussetzungen ebenfalls parallel. Denn Fig. 71. sind m und t gleich, weil AB und CD parallel, und m und t Wechselwinkel sind; und t und z sind auch gleich, weil CD und EF parallel sind, und t ein äusserer, z aber ein innerer ihm gegenüber stehender Winkel ist. Folglich müssen auch m und z, die Wechselwinkel der beyden Linien AB und EF, wenn sie durch GI geschnitten werden, gleich, und daher AB und EF selbst parallel seyn.

L. Nunmehr haben wir nur noch einmal nöthig, uns zu unterreden, um den Anfang

des

des Weges, der zur Mathematic führt, zurückgelegt zu haben. Wir werden nemlich in der nächsten Unterredung die Lehre von der Gleichheit derer Dreyecke die sich decken, und aller in ihnen befindlichen Stücke, der Seiten und Winkel derselben, beschliessen, und diese Lehre ist die Grundlage von allem folgenden. Bis jetzt habe ich Sie fast immer geleitet, selten nur, und wenig, habe ich Sie allein gehen lassen. Nach der nächsten Unterredung sollen Sie anfangen, ohne Leitung fortzufahren, und ich werde Sie nicht leiten, sondern nur begleiten.

Achtzehntes Gespräch.

L. Fig 72. ist eine gerade Linie AB gezogen, und über ihr ein Punkt C bemerkt. Versuchen Sie, durch diesen Punkt C eine Linie zu ziehen, die AB parallel ist. — Ueberdenken Sie zuvor sorgfältig, wie diese Linie beschaffen seyn müsse.

S. Sie muß so beschaffen seyn, daß wenn ich von ihr nach AB eine gerade Linie ziehe, die entstehenden Wechselwinkel gleich sind. —

L. Wie, wenn Sie zuvörderst aus dem Punkte C, wie Fig. 73, eine gerade Linie CD nach AB zögen?

S. Nun weiß ich, wie ich es machen muß. Ich ziehe erst aus dem Punkte C eine gerade

Linie

Linie CD nach der Linie AB, und alsdann lege ich auf der andern Seite derselben an C den Winkel CDB. (Dies geschieht, und es entsteht die 74ste Figur.) Die Linie EF muß nun der AB parallel seyn, denn die Wechselwinkel ECD und CDB sind gleich.

L. Fig. 75 stellt ein Dreyeck ABC vor, dessen Seite BC nach D verlängert worden. Angenommen, daß CE der Seite AB parallel gezogen worden; was für Winkel sind dann gleich?

S. ECD ist gleich B, denn ECD ist ein äusserer und B ein innerer ihm gegenüber stehender Winkel; und ACE ist gleich A, denn sie sind Wechselwinkel.

L. Wie groß ist also nun der ganze äussere Winkel ACD?

S. So groß als die beyden innern ihm gegenüber stehende Winkel A und B zusammen genommen.

L. Bis jetzt haben wir nur gewußt, daß der äussere Winkel eines Dreyecks, dessen eine Seite verlängert worden, grösser sey, als jeder der innern ihm gegenüber stehenden Winkel. Nun wissen wir auch, daß der äussere Winkel gleich ist beyden innern ihm gegenüber stehenden Winkeln zusammen genommen. Unsere Kenntniß von der Grösse dieses äussern Winkels ist also nun genauer als sie sonst gewesen; und so wie es hier statt findet, so werden Sie auch bey andern Gegenständen erfahren,

daß

daß ihre Kenntiß davon immer genauer und bestimmter wird. — Wie groß ist nun aber der Winkel ACB und ACD zusammen genommen?

S. So groß als zwey rechte Winkel.

L. ACD aber ist gleich?

S. Den beyden Winkeln A und B.

L. Und wie groß also alle drey Winkel des Dreyecks ABC, nemlich ACB, A und B, zusammen genommen?

S. So groß als zwey rechte Winkel.

L. Kann man das, was wir jetzt von den drey Winkeln des Dreyecks ABC Fig. 75. behaupten, auch von den drey Winkeln eines jeden Dreyecks darthun?

S. Ja; denn man kann in jedem Dreyecke eine Seite verlängern, und aus der Spitze des äussern Winkels mit einer andern Seite eine Parallellinie ziehen, und dann eben denselben Beweis führen.

L. Wie leicht man sich von der Wahrheit dieser Sätze überzeugt, nachdem man sich die Lehrsätze, die bey der Betrachtung der Parallellinien da gewesen, bekannt gemacht hat! Da uns die Kenntniß der Parallellinien so grosse Vortheile verschafft, so wollen wir sie auch noch unter einer Bedingung betrachten. — Fig. 76. also sind zwey Parallellinien AB und CD gezogen, und beyde einander gleich gemacht. Was können Sie mit dieser Figur nach Ihrer ersten Regel für eine Veränderung vornehmen?

S. Ich kann von A nach C, und von B nach D gerade Linien ziehen.

L. Thun Sie es, und verbinden Sie also die beyden gleichen Parallelen AB und CD durch die beyden geraden Linien AC und BD.

S. (Thut es, und es entsteht die 77ste Figur.)

L. Wie sind nun die beyden Linien AC und BD beschaffen?

S. — Sie sind gleich. Denn wenn ich die Linie AD ziehe, Fig. 78, so sind die beyden Dreyecke ACD und ABD einander gleich, weil CD gleich AB, AD gleich AD, und x gleich o ist, denn diese Winkel sind Wechselwinkel.

L. Und was können Sie nun von den Winkeln m und n behaupten?

S. Sie sind ebenfalls gleich, denn sie stehen in den gleichen Dreyecken ACD und ABD den gleichen Seiten CD und AB gegenüber.

L. Und wie müssen, da m gleich n ist, die Linien AC und BD, ausserdem daß sie gleich sind, noch beschaffen seyn?

S. Sie müssen auch parallel seyn.

L. Wie sind also die beyden Linien, die zwey gleiche Parallellinien in ihren Endpunkten an einerley Seite verbinden, beschaffen?

S. Sie sind auch gleich und parallel.

L. Was ist die Figur ABCD, Fig. 77, für eine Figur? Auch noch ein Dreyeck?

S. Nein, ein Viereck.

L. Und wie sind darin die gegenüber stehende Seiten beschaffen?

S. Sie

S. Sie sind so wohl gleich als auch parallel.

L. Dergleichen Figuren nun nennt man Parallelogramme, worunter man also Vierecke versteht, deren gegenüber stehende Seiten entweder parallel, oder gleich sind. Wir werden in der Folge sehen, daß weder die parallele Lage der gegenüber stehenden Seiten eines Parallelogramms ohne die Gleichheit derselben, noch ihre Gleichheit ohne die parallele Lage statt finden könne. So lange wir uns aber davon nicht vollkommen überzeugt haben, beschreiben wir ein Parallelogramm entweder nach dem einen, oder dem andern Kennzeichen allein genommen, und wir wollen fürs erste das erste Kennzeichen gebrauchen. — Die Linie AD Fig 78. welche aus der Spitze des einen Winkels eines Parallelogramms nach der Spitze des gegenüber stehenden Winkels gezogen ist, hat auch einen besondern Namen; man nennt sie die Diagonale. — Nun die Frage: Giebt es nicht, so wie es verschiedene Arten der Dreyecke giebt, auch verschiedene Arten von Parallelogrammen?

S. Ich glaube, ja; aber, was für welche? weiß ich nicht.

L. Welche Seiten sind in einem jeden Parallelogramme zum wenigsten gleich?

S. Die gegenüber stehende.

L. Sollten nicht auch alle vier Seiten einander gleich seyn können?

S. Warum nicht?

L. Wir hätten also schon zwey Arten der Parallelogramme. Parallelogramme nemlich, worin alle vier Seiten gleich sind, und Parallelogramme, worin nur die gegenüber stehende Seiten gleich sind. Betrachten Sie nun die Winkel eines Parallelogramms z. B. ABCD Fig. 77. Wie groß sind jede zwey an einer Seite eines Parallelogramms liegende Winkel, z. B. A und B Fig. 77?

S. So groß als zwey rechte Winkel, denn sie sind immer zwey innere auf einer Seite liegende Winkel zweyer Parallelen, die von einer dritten geschnitten worden.

L. Gesetzt also, daß A ein rechter Winkel wäre, so müßte B seyn?

S. Ebenfalls ein rechter Winkel.

L. Und C?

S. Ebenfalls.

L. Und D?

S. Auch.

L. Wenn also in einem Parallelogramme Ein Winkel ein rechter ist, so sind alle übrigen?

S. Ebenfalls rechte Winkel.

L. Gesetzt aber, daß A ein stumpfer Winkel ist; so ist B?

S. Ein spitziger.

L. Und C?

S. Auch ein spitziger.

L. Und D?

S. Wieder ein stumpfer.

L. Ge-

L. Gesetzt also, daß in einem Parallelogramme Ein Winkel ein schiefer Winkel ist; so sind die übrigen?

S. Ebenfalls schiefe Winkel.

L. In Ansehung der Winkel also theilen sich die Parallelogramme?

S. In rechtwinklige und schiefwinklige.

L. Also sind nun auch die gleichseitigen Parallelogramme, in Ansehung ihrer Winkel?

S. Entweder rechtwinklige oder schiefwinklige.

L. Und die ungleichseitigen? Ich verstehe darunter diejenigen, welche nur die gegenüberstehende Seiten gleich haben.

S. Auch diese sind entweder rechtwinklige oder schiefwinklige.

L. Wie viel Arten von Parallelogrammen giebt es also?

S. Viere.

L. Erstlich?

S. Gleichseitige und rechtwinklige.

L. Zweytens?

S. Gleichseitige und schiefwinklige.

L Drittens?

S. Ungleichseitige und rechtwinklige.

L. Und viertens endlich?

S. Ungleichseitige und schiefwinklige.

L. Dies sind nun diejenigen Gegenstände, über welche wir uns in unsern folgenden Unterredungen unterhalten müssen, und bey deren Untersuchung uns das, was wir bisher von

den Dreyecken gelernt haben, von dem größten Nutzen seyn wird. Eine jede Art der Parallelogramme hat daher auch, weil eine jede oft besonders betrachtet wird, einen besondern Namen erhalten. Das gleichseitige und rechtwinklige Parallelogramm heißt Quadrat, das gleichseitige schiefwinklige aber Rhombus; das ungleichseitige rechtwinklige Parallelogramm nennt man Rectangel, und das ungleichseitige schiefwinklige, Rhomboides, Fig 79 80. 81. und 77, enthalten von jeder Art ein Beyspiel. Hier geht nun aber auch der Theil der Mathematic an, wo ich schon gesagt habe, daß ich Sie nur begleiten werde. Was wird das für ein Vergnügen für Sie seyn, wenn Sie die einzuschlagenden Wege selbst werden finden können! — Aber zuvor muß ich Sie noch mit einem Vortheile bekannt machen. — Wenn Sie erst so weit seyn werden, daß Sie Schriften über die Mathematic lesen können, so werden Sie darin viele Zeichen finden, deren Bedeutung Sie bis jetzt noch nicht wissen, z. B =, >, <, +, —, ♯ △, □ und dazu kommen noch einige Abkürzungen, z. B Dat: Th; Hyp: Rect. Man bedienet sich dieser Zeichen, um das, was man mit Worten sehr weitläuftig würde ausdrucken müssen, wenn man es aufschreiben wollte, durch sie auf eine viel kürzere Art zu bezeichnen, und dadurch in den Stand zu kommen, das aufgeschriebene desto leichter und bequemer zu übersehen. Es ver-

dienen daher diese Zeichen, daß auch wir uns dieselben bekannt machen, und uns in der Folge ihren Gebrauch angewöhnen; und ich will Ihnen daher heute noch die Bedeutung und den Gebrauch der angeführten Zeichen erklären.

Das Zeichen = gebraucht man, um anzuzeigen, daß zwey Dinge gleich sind. Man setzt solches zwischen diese beyden Dinge, und spricht das Zeichen selbst durch, ist gleich, aus. Gesetzt z. B. Sie wollten den Beweis von dem Satze aufsetzen, daß Fig. 29, das Dreyeck ABE gleich sey dem Dreyecke FEC; so könnten Sie solches bey dem Gebrauche dieses Zeichens auf folgende Art thun.

Das Dreyeck ABE = dem Dreyecke FEC;
denn AE = EC
und BE = EF
und AEB = FEC.

Oft bedienet man sich auch dieses Zeichens, um anzuzeigen, daß mehr als zwey Grössen unter einander gleich sind. Alsdann schreibt man diese Grössen in eine Reihe, und setzt das Zeichen = zwischen jede zwey unmittelbar auf einander folgende. z. B.

A = B = C = D = F = F

soll anzeigen, daß alle die Grössen, welche man A, B, C, D, E, F genannt hat, gar nicht von einander verschieden sind.

Das Zeichen > gebraucht man, um anzuzeigen, daß eine Sache grösser ist als eine andere. Die Sache, welche grösser ist, wird vor das Zei-

chen, diejenige aber, welche kleiner ist, hinter dasselbe gesetzt, und das Zeichen selbst spricht man durch, ist grösser, aus. Bey Fig. 29 also könnte man schreiben.

ACD > A

Das Zeichen < gebraucht man, um anzuzeigen, daß eine Sache kleiner sey als eine andere. Das kleinere steht jedesmal vor dem Zeichen, und das Zeichen selbst wird durch, ist kleiner, ausgesprochen. z. B. Fig. 29.

A < ACD

Diese beyde Zeichen sind also nur in der Art der Setzung unterschieden, im Grunde sind beyde Ein Zeichen. Man kann daher ACD > A, und A < ACD auch rückwärts lesen.

Das Zeichen + setzt man zwischen zwey und mehrere Grössen, um anzuzeigen, daß sie insgesammt zusammen genommen, oder als Eine Grösse betrachtet werden sollen. Der Kürze halber spricht man dieses Zeichen durch und, oder plus aus, setzt aber im ersten Falle am Ende noch oft, zusammen genommen hinzu. Z. B.

Fig. 20. ACE + ECB = 2 R

Fig. 75. ACD = A + B

Fig. 37. BA + AC > BC.

Das Zeichen — gebraucht man in vielen Fällen; wir wollen aber jetzt nur den betrachten, da man es zwischen zwey Grössen setzt, wovon die eine von der andern weggenommen werden soll. In diesem Falle spricht man es

aus

aus durch, weniger, und setzt die Grösse, die von einer andern weggenommen werden soll, nach dem Zeichen. z. B.

Fig. 20. ACE = 2 R — ECB

Das Zeichen ⌗ setzt man zwischen zwey Linien, wovon man anzeigen will, daß sie parallel sind, und spricht es aus durch, ist parallel. z. B.

Wenn Fig. 67. IK ⌗ LM

so ist 1. r = v
s = t
m = z
n = x

2. m = t
n = v
x = r
z = s

3. r + t = 2 R
s + v = 2 R

Wenn Fig. 68 AB ⌗ CD
und EFD = R
so ist auch FEB = R.

Das Zeichen △ setzt man anstatt der Worte, das Dreyeck, und d. gl. z. B. △ ABC Fig. 33. Wenn ABC allein stünde, so hätte man darunter den Winkel B zu verstehen, und es dient also dieses Zeichen oft, zu verhindern, daß man sich nicht einen Winkel gedenke, wo die Rede von einem Dreyecke ist.

Das Zeichen □ setzt man, wenn man anzeigen will, daß eine Figur ein Quadrat sey, z. □ ABCD, oder □ AC Fig. 79. Um eine viereckige

Figur anzuzeigen, nennt und schreibt man nemlich oft nur zwey an entgegenstehenden Winkeln stehende Buchstaben.

Die Abkürzung, Rect. wird gesetzt, wenn man von einem Vierecke anzeigen will, daß es ein Rectangel sey, z. B. Rect. AD, Fig. 80.

Die Abkürzung Dat. setzt man vor dasjenige, was bekannt ist, oder als bekannt angesehen wird; die Abkürzung Th. vor das, was bewiesen werden soll; und die Abkürzung Hyp. vor das, was man annimmt, um desto leichter zu seinem Zwecke zu gelangen. Man setzt dieses alles nemlich oft besonders, um es beständig vor Augen zu haben, und wird durch diese Abkürzungen ebenfalls des weitläuftigen Schreibens überhoben. Gesetzt z. B. man sollte Fig. 52 unter den bey der Betrachtung dieser Figur berührten Bedingungen beweisen, daß AC grösser als DC sey; so könnte man alles so aufsetzen

Dat. BC = BC
BA = BD
Th. AC > DC
Hyp. Man ziehe AD

Beweis.

ADB = BAD
denn AB = BD
also ADB > CAD
und noch mehr ADC > CAD
folglich AC > DC.

Auf diese Art müssen Sie künftig die Beweise von allen Sätzen, die wir durchnehmen werden, für Sich, und ohne daß ich es Ihnen weiter rathe, aufsetzen.

(Das bisher von den Zeichen gesagte wurd dem Lehrling noch an mehrern Beyspielen gezeigt, er in der Lesung der Zeichen und dem Gebrauche derselben geübt, und dabey noch verschiedene von den durchgenommenen Sätzen wiederholt, insbesondere die schwerern. Zugleich mußte der Lehrling nochmals aus verschiedenen Lehrsätzen und Aufgaben Regeln, wie im Anfange des 7ten Gesprächs des Versuchs da gewesen, herleiten. Alles dies braucht indeß hier nur angezeigt, nicht ausführlich beschrieben zu werden.)

Neunzehntes Gespräch.

L. Was für Sätze werden wir wohl bey der Betrachtung der Parallelogramme, die wir nunmehr anfangen wollen, zu untersuchen haben?

S. Das kann ich noch nicht sagen, denn ich weiß von den Parallelogrammen noch weiter nichts, als was man unter einem Parallelogramme versteht, und was es für Arten der Parallelogromme giebt.

L. Als wir die Betrachtung der Dreyecke anfiengen, wären Sie freylich nicht im Stande gewesen, sich zum voraus die Sätze vorzustellen,

len, deren Wahrheit wir bisher untersucht haben. Die Ursache davon ist, weil Sie damals noch nichts ähnliches getrieben hatten. Jetzt aber, da Sie schon eine Art der Figuren, nemlich die Dreyecke, kennen, ist es Ihnen allerdings möglich, die vorgelegte Frage zu beantworten. — Ueberlegen Sie einmal, ob Sie mir mit zwey Worten sagen können, was wir bisher bey allen Dreyecken, die wir betrachtet, untersucht und zu bestimmen uns bemüht haben?

S. Die Gleichheit derselben.

L. Waren wir dabey zufrieden, wenn wir über die ganzen Dreyecke ein Urtheil fällen konnten, oder haben wir auch besonders die Seiten und Winkel derselben betrachtet?

S. Wir haben auch die Seiten und die Winkel der Dreyecke besonders betrachtet, und gesehen, nicht bloß, ob sie gleich, sondern auch, ob sie ungleich waren. Bisweilen haben wir uns auch mit geraden Linien und Winkeln beschäftiget, die keine Theile eines Dreyecks waren.

L. Gut! Gesetzt nun daß wir die Parallelogramme auf eine ähnliche Art, als bisher die Dreyecke, betrachten wollten; was würden wir bey ihnen zu untersuchen haben?

S. Ob sie gleich wären, oder nicht.

L. Und wäre es genug, die ganzen Parallelogramme zu betrachten, oder müßten wir auch auf die Theile derselben unser Augenmerk richten?

S. Wir

S. Wir müßten, so wie wir es bey den Dreyecken gemacht haben, auch auf die Theile der Parallelogramme unser Augenmerk richten.

L. Sind wir aber wohl im Stande, die Gleichheit zweyer oder mehrerer Parallelogramme zu untersuchen, und die Parallelogramme selbst also mit einander zu vergleichen, ohne daß wir zuvor ein jedes derselben genau kennen gelernt haben?

S. Nein.

L. Was ist also das erste bey der Betrachtung der Parallelogramme?

S. Die Betrachtung einzeler Parallelogramme.

L. Und wie vielerley Stücke giebt es bey einem Parallelogramme zu betrachten?

S. Zweyerley, Seiten und Winkel.

L. Was folgt auf die Betrachtung einzeler Parallelogramme?

S. Die Vergleichung zweyer Parallelogramme unter einander.

L. Und hierauf?

S. Die Betrachtung der Theile dieser Parallelogramme.

L. In was für Theile ist das Parallelogramme AD, Fig. 78. durch die Diagonale AD getheilt worden?

S. In zwey Dreyecke, in das Dreyeck ACD und in das Dreyeck ADB.

L. Also kommen wir vielleicht bey der Betrachtung der Parallelogramme noch einmal

auf

auf die Dreyecke zurück. — Uebersehen Sie nun nicht einigermassen schon zum voraus den Weg, den Sie zu gehen haben werden.

S. Ja, und ich denke, daß mir das die Sätze von den Parallelogrammen leichter machen wird, als sie mir ohne dasselbe gewesen seyn würden.

L. Den Vortheil haben Sie also auch von dem bisher erlernten, daß Sie das nun folgende schon einigermassen sich vorstellen können. Wenn Sie die Lehre von den Parallelogrammen inne haben, und wieder einen neuen Gegenstand zu betrachten anfangen werden, so werden Sie schon noch mehr im Stande seyn, denselben zum voraus im allgemeinen Sich vorzustellen. Ueberhaupt, je weiter man in der Mathematic fortrückt, desto mehr ist man im Stande zu thun, und auch darum ist sie eine angenehme Wissenschaft. — Nun zur Betrachtung einzeler Parallelogramme! Ich wiederhole noch einmal die Erklärung eines Parallelogramms. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen gegenüber stehende Seiten einander parallel sind. Diese Erklärung vorausgesetzt, sagen Sie mir: Sind die gegenüber stehende Seiten eines Parallelogramms einander gleich oder nicht? Ist z. B. Fig. 77. AB = CD, und AC = BD?

S. (Besinnt sich eine Zeitlang.) Ja, denn wenn ich die Diagonale AD ziehe, Fig. 78, so ist

$$\Delta ACD = \Delta ABD.$$

denn AD = AD,
ferner o = x
und m = n, denn o und x,

desgleichen m und n sind Wechselwinkel zweyer Parallelen, die von einer dritten geschnitten werden. Da nun

$$\triangle ACD = \triangle ABD;$$

so ist auch CA = BD
und CD = AB.

L. Wie sind aber die gegenüber stehende Winkel in einem Parallelogramme, z. B. A und D, desgleichen C und B, in AD Fig. 77. beschaffen?

S. Auch diese sind gleich. Denn es ist

1. A = D,
weil A = 2 R — B
und auch D = 2 R — B
2 C = B
weil C = 2 R — D.
und auch B = 2 R — D.

L. Nun drucken Sie diesen bewiesenen doppelten Satz, den ersten Lehrsatz von den Parallelogrammen, noch einmal aus.

S. In einem jeden Parallelogramme sind die gegenüber stehende Seiten und Winkel einander gleich.

L. Sie können auch noch dazu setzen, so wie Sie es schon bewiesen haben, daß die Diagonale ein jedes Parallelogramm in zwey gleiche Theile theilt. — Hierin besteht nun alles, was wir uns aus der Betrachtung einzeler Parallelgramme zu merken haben, und wir können

also so gleich zur Vergleichung zweyer Parallelogramme fortgehen. — Der erste Satz, von dessen Wahrheit wir uns zu überzeugen haben, ist: Parallelogramme, auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen, sind einander gleich. Betrachten Sie die 82, 83 und 84ste Figur. Es ist

Fig 82. AE ∥ BC, AB ∥ DC, und DB ∥ EC; und Fig. 83 und 84. AF ∥ BC, AB ∥ DC, und EB ∥ FC. Nun ist zu beweisen, daß

1. Fig. 82. ABCD = DBCE,
2. Fig. 83. ABCD = EBCF, und so auch
3. Fig. 84. ABCD = EBCF. Wir wollen diese drey Sätze nach einander erwegen. Wir haben also erstlich Fig. 82.

Dat. AE ∥ BC, AB ∥ DC, und DB ∥ EC; und
Th. ABCD = DBCE.

Versuchen Sie den Beweis zu führen.

S. Dieser Beweis ist nicht schwer. Es ist Fig. 82

△ ABD = △ DBC
und △ DBC = △ DCE
also △ ABD + △ DBC = △ DBC + DCE
oder ABCD = DBCE.

L. Zweytens haben wir Fig. 83.
Dat. AF ∥ BC, AB ∥ DC, und EB ∥ FC;
und
Th. ABCD = EBCF. Werden Sie auch hier den Beweis führen können?

S. (Nach

S. (Nach einigem Nachdenken) EBCD = EBCD.
und △ ABE = △ DCF,
also EBCD + △ ABE = EBCD + △ DCF,
oder ABCD = EBCF.

L. Dürfen Sie aber so ohne Beweis voraussetzen, daß △ ABE = △ DCF?

S. Es ist wahr, das ist noch nicht ausgemacht, und ich muß es also erst noch beweisen. Wie fange ich das an? — Nun weiß ichs.

△ ABE = △ DCF
denn AB = DC, als gegenüb. steh. Seit. eines Parall.
ferner BAE = CDF } als äusserer und innere
und BEA = CFD } gegenüb. steh. Winkel.

L. Diesen Beweis hätten Sie vorher so gleich nach dem Satze selbst vortragen müssen. Nun zum dritten Satze. Es sind Fig. 84.
Dat. AF ∥ BC, AB ∥ DC, und EB ∥ FC, und
Th. ABCD = EBCF. Wie ist der Beweis?

S. Hier weiß ich mir nicht zu helfen.

L. Haben nicht beyde Parallelogramme, ABCD und ECBF, wieder ein Stück gemein?

S. Ja, das Dreyeck BGC.

L. Also ist doch △ BCG = △ BCG?

S. Ja.

L. Wie wenn wir also noch darthun könnten, daß ABGD = EGCF?

S. Dann wäre der ganze Beweis leicht zu führen.

L. Was entsteht für eine Figur, wenn wir zu ABGD das Dreyeck DGE setzen?

S. Das Dreyeck ABE.

L. Und was für eine, wenn wir auch zu EGCF das Dreyeck DGE fügen?

S. Das Dreyeck DCF.

L. Und wie sind die beyden Dreyecke ABE und DCF beschaffen?

S. — — Gleich. Denn

AB = DC, als gegenüb. steh. Seit.

ferner BAE = CDF
und AEB = DFC } als gegenüb. steh. Wink.

L. Von diesen beyden Dreyecken ABE und DCF nun das Dreyeck DGE wieder weggenommen, so entstehen, was für Figuren?

S. Es bleiben nun wieder die Vierecke ABGD und EGCF übrig, und diese sind gleich, denn sie sind übrig geblieben, nachdem von jedem der gleichen Dreyecke ABE und DCF das kleinere Dreyeck DGE weggenommen worden war. Nun verstehe ichs.

L. Führen Sie nun den Beweis noch einmal, aber vollständig, und in der gehörigen Ordnung.

S. Es ist Fig. 84.

ABCD = EBCF.

denn 1. △BGC = △BGC,
und 2. ABGD = EGCF,
weil △ABE = △DCF,
indem AB = DC
ferner BAE = CDF
und AEB = DFC;
daher △ABE — △DGE = △DCF — △DGE

oder ABGD = EGCF. Da
nun 1. △ BGC = △ BGC
und 2. ABGD = EGCF
so ist auch △ BGC + ABGD = △ BGC
+ EGCF
oder ABCD = EBCF.

L. Sollten wohl zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallelen liegen, noch eine andere Lage haben können, als die Parallelogramme Fig. 82. 83. und 84?

S. Nein.

L. Dergleichen Parallelogramme liegen also entweder so, daß von einem jeden derselben die eine Seite eine Diagonale des andern Parallelogramms ist, wie Fig. 82; oder beyde Parallelogramme haben ein Viereck, wie Fig. 83, oder ein Dreyeck, wie Fig. 84, gemein. Eine vierte Lage ist nicht möglich, und der geführte Beweis für den Satz: Parallelogramme auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich; ist daher auch vollständig. — — Wie verhält es sich aber ferner mit solchen Parallelogrammen, die zwar auch zwischen einerley Parallelen liegen, aber nicht einerley, sondern gleiche Grundlinien haben? Sind auch diese gleich? Betrachten Sie die 85ste Figur, und untersuchen Sie daselbst, ob, wenn AH ∥ BG, AB ∥ DC, und EF ∥ HG, auch AC = EG, oder nicht?

S. Das weiß ich nicht zu beurtheilen.

L. Ziehen Sie also die Linien BE und CH, Fig. 86; was erhalten Sie dadurch?

S. Das Parallelogramm EBCH.

L. Zwischen was für Parallelen liegt dasselbe?

S. Zwischen den Parallelen AH und BG.

L. Hat dasselbe nicht etwa mit einem von den übrigen Parallelogrammen auch einerley Grundlinie?

S. Ja, mit beyden. Denn die Parallelogramme ABCD und EBCH stehen beyde auf der Grundlinie BC, und die Parallelogramme EBCH und EFGH beyde auf der Grundlinie EH.

L. Was findet also statt?

S. Man kann nun beweisen, daß

ABCD = EFGH; denn

es ist ABCD = EBCH

und EBCH = EFGH;

also auch ABCD = EFGH.

L. Wir haben also schon zwey Sätze zur Vergleichung zweyer Parallelogramme überhaupt, und nachher werden wir dazu noch einen dritten erhalten. Jetzt wollen wir die 82 und 83ste Figur noch einmal betrachten, und dabey auf die darin sichtbaren Theile der Parallelogramme ABCD, EDBC, ABCD, und EBCF sehen. Doch zuvor noch eine Frage. Sind zwey Parallelogramme, auf einerley oder gleichen

chen Grundlinien, und zwischen einerley Parallelen, auch so einander gleich, daß sie sich decken?

S. Nein; gleich sind sie allezeit, aber decken können sie sich nicht allezeit.

L. Es ist also die Gleichheit dieser Parallelogramme auch nicht so vollkommen, als die Gleichheit der Dreyecke, die wir bisher betrachtet haben. Bey den betrachteten Dreyecken konnten wir auch von der Gleichheit der ganzen Dreyecke auf die Gleichheit aller einzeln Seiten und Winkel derselben schliessen; aber ein ähnliches Verfahren würde uns hier zu ganz falschen Behauptungen leiten. — Wie sind nun Fig. 82. die beyden Dreyecke ABD und DCE, und Fig. 83. die Dreyecke ABE und DCF beschaffen?

S. $\triangle$ ABD $=$ $\triangle$ DCE, und $\triangle$ ABE $=$ $\triangle$ DCF.

L. Den Beweis für diese Behauptungen haben wir schon gehabt, und es ist also nur die Frage zu thun, ob nicht diese Dreyecke, paarweise genommen, so wie sie zwischen einerley Parallelen liegen, auch gleiche Grundlinien haben?

S. Ja, sie haben gleiche Grundlinien, denn Fig 82 ist AD $=$ DE, und Fig. 83. AE $=$ DF.

L. Warum ist Fig. 82. AD $=$ DE.

S. Weil AD so wohl als DE der gegenüber stehenden Seite BC gleich ist.

L. Warum aber Fig. 83. AE = DF.

S. Es ist Fig. 83.

AD = EF

denn AD = BC, und auch EF = BC;

folglich ist auch AD — ED = EF — ED

oder AE = DF.

L. Hier sind also zwey Dreyecke, die gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen liegen, einander gleich. Vielleicht sind auch jede zwey Dreyecke, die einerley oder gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallelen liegen, einander gleich. Wir wollen dies untersuchen, und wenn es sich so verhält, uns den Beweis davon bekannt machen. — Fig. 87. sind zwey Dreyecke ABC und DBC, welche die Grundlinie BC gemein haben, und beyde zwischen den Parallelen AD und BC liegen. Nun ist also

Th: △ ABC = △ DBC. Können Sie diesen Satz wohl beweisen?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Nein.

L. Aber wenn Sie, wie Fig. 88 BE ∥ AC und CF ∥ BD zögen, AD verlängerten, und die Parallelogramme EBCA und DBCF beschrieben, die auch einerley Grundlinie BC haben, und ebenfalls zwischen einerley Parallelen EF und BC liegen?

S. Nun kann ich beweisen, daß

△ ABC = △ DBC;

denn EBAC = DBCF,

und △ ABC = $\frac{1}{2}$ EBCA,

und

und △ DBC = ½ DBCF;
also ist auch △ ABC = △ DBC.

L. Können Sie nicht jede zwey Dreyecke, die einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallelen liegen, auf eine ähnliche Art durch Ziehung zweyer andern Parallelinien in zwey gleiche Parallelogramme verwandeln, wovon die Dreyecke die Hälften sind?

S. Ja.

L. Und wie sind also jede zwey Dreyecke, die einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallellinien liegen, beschaffen?

S. Sie sind einander gleich.

L. Auch so, daß sie sich decken.

S. Nein, gleich sind diese Dreyecke wohl, aber sie decken sich nicht immer.

L. Nun zu dem Falle, wenn zwey Dreyecke gleiche Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallellinien liegen. Fig. 89. soll seyn

Dat: BC = EF
und AD ♯ BF; und
Th: △ ABC = △ DEF.

S. Diesen Satz will ich wohl beweisen. Ich verlängere AD, und ziehe aus C, CG ♯ BA und aus F, FH ♯ ED. Nun ist

ABCG = DEFH,
△ ABC = ½ ABCG
und △ DEF = ½ DEFH;
also △ ABC = △ DEF. Die Parallelogramme ABCG und DEFH sind einander gleich, weil sie gleiche Grundlinien BC und EF

haben, und zwischen einerley Parallelen AH und BF liegen.

L. Decken sich aber die Dreyecke ABC und DEF?

S. Auch diese Dreyecke decken sich nicht.

L. Wir haben also nun noch zwey Sätze zur Vergleichung der Dreyecke, die auch wichtig sind, ob sie uns gleich nur von den ganzen Dreyecken, und nicht auch von den Seiten und Winkeln derselben lehren, daß sie gleich sind. Beyde Sätze lassen sich aber auch umkehren, und auf die Art, wie wir bisher alle umgekehrte Sätze bewiesen haben, darthun. Denken Sie darüber nach, wie so wohl das eine als das andere geschehen könne. In unserer nächsten Unterredung werde ich mich dann darüber weiter mit Ihnen unterhalten, und darauf aus den erlernten Sätzen von den Parallelogrammen und Dreyecken verschiedene wichtige Folgen herzuleiten suchen.

Zwanzigstes Gespräch.

L. Wie weit sind Sie in der Umkehrung des zuletzt von den Dreyecken durchgenommenen Satzes gekommen?

S. Ich habe den umgekehrten Satz wohl gefunden, und auch den Anfang des Beweises mir wohl vorstellen können; aber ich bin nicht

im

im Stande gewesen, den Beweis ganz zu Ende zu bringen.

L. Wie haben Sie Sich den Satz umgekehrt gedacht?

S. Wenn zwey Dreyecke einerley Grundlinie haben, und einander gleich sind, so liegen sie zwischen einerley Parallelen.

L. Wenn nemlich beyde Dreyecke auch überdem noch nach Einer Seite gelegt werden. — Welches ist denn nun der Anfang Ihres Beweises für diesen Satz?

S. Ich habe mir zwey Dreyecke vorgestellt, die einerley Grundlinie haben, und einander gleich sind, und dazu diese Figur gemacht. (Der Lehrling zeigt eine Figur, wie die 91ste.) Die beyden Dreyecke ABC und DBC sollen darin einander gleich seyn, und beyder Grundlinie ist BC; durch ihre Spitzen A und D habe ich die Linie AD gezogen, und nun beweisen wollen, daß AD parallel BC ist. Wäre, sage ich AD nicht parallel BC, so könnte man durch A eine andere Linie der BC parallel ziehen, und diese fiele entweder zwischen AD und BC, wie hier (Fig. 92.) AF oder ausserhalb AD und BC wie hier (Fig. 93.) ebenfalls AF fällt. So weit bin ich gekommen.

L. Wie wenn Sie Fig. 92, so wie solches Fig. 94 geschehen ist, den Punkt, wo sich die beyden Linien AF und BD schneiden, G genannt und die Linie GC gezogen und dadurch das Dreyeck BGC vollendet hätten?

S. (Nachdenkend.) Dann wäre das Dreyeck ABC gleich dem Dreyecke GBC, weil beyde einerley Grundlinie hätten und zwischen einerley Parallelen AF und BC lägen. Aber das Dreyeck ABC ist auch gleich dem Dreyecke DBC; also müßte nun auch das Dreyeck GBC gleich seyn dem Dreyecke DBC, und das ist unmöglich, denn das Dreyeck GBC ist nur ein Theil von dem Dreyecke DBC. — Nun sehe ich wohl, daß AF nicht parallel BC seyn kann.

L. Sollte denn wohl Fig. 93. AF der BC parallel seyn können?

S. Ich muß, um das zu beurtheilen, erst BD verlängern, und von dem Punkte, wo sie die AF schneidet, eine gerade Linie nach C ziehen. (Dies geschiehet, und der Punkt, wo AF und die verlängerte BD sich schneiden, wird G genannt, so daß die 95ste Figur entsteht.) Wenn nun AF und BC parallel wären, so müßten die beyden Dreyecke ABC und GBC einander gleich seyn. Wäre das, so wären, da das Dreyeck ABC dem Dreyecke DBC gleich seyn soll, das Dreyeck GBC auch dem Dreyecke DBC gleich, und das ist wieder unmöglich, denn das Dreyeck DBC ist nur ein Theil von dem Dreyecke GBC. Es kann also auch hier die Linie AF der Linie BC nicht parallel seyn, und es ist also AD parallel der Linie BC.

L. Versuchen Sie nun den Satz so wohl als seinen Beweis, und zwar so, daß Sie die

erklär-

erklärten Zeichen und Abkürzungen gebrauchen, aufzusetzen. Sie können dabey Fig. 91. bis 95. zum Grunde legen.

S. Dat: $\triangle ABC = \triangle DBC$

Th: $AD \nparallel BC$.

Wäre AD nicht parallel der BC, so wäre es entweder AF Fig. 92. oder AF 93. Im ersten Falle könnte ich, wie Fig. 94, GC ziehen, und im andern, wie Fig. 95, BD bis G verlängern und dann GC ziehen. Nun wäre

1. Fig. 94. $\triangle ABC = GBC$,

weil $BC = BC$

und $AG \nparallel BC$.

Es ist aber $\triangle ABC = \triangle DBC$, und es wäre also $\triangle GBC = \triangle DBC$. Dies ist nun unmöglich, und es kann also AF nicht parallel der BC seyn. Ferner wäre

2. Fig. 95. $\triangle ABC = \triangle GBC$

weil $BC = BC$

und $AG \nparallel BC$

Es ist aber auch $\triangle ABC = \triangle DBC$ und also wäre $\triangle GBC = \triangle DBC$ Aber auch dies ist unmöglich, und es ist also auch hier AF nicht der BC parallel. Es muß also eine durch A gezogene und der BC parallele Linie auch durch D gehen.

L Sollten denn wohl auch zwey Dreyecke, die gleiche Grundlinien haben und gleich sind, wenn man sie auf Eine gerade Linie und nach einer Seite zu legt, zwischen einerley Parallelen fallen? Angenommen z. B. daß Fig. 96.

BC

BC = EF, und △ ABC = △ DEF; sollte dann auch AD ♯ BF seyn?

S. Ja, denn die Linie, welche durch A mit der Linie BF parallel gezogen werden kann, kann weder zwischen AD und BF, noch ausserhalb AD und BF fallen. Denn fiele sie erstlich zwischen AD und BF, wie Fig. 97; so schnitte sie die Seite DE des Dreyecks DEF in dem Punkte G, und man könnte GF ziehen, und das Dreyeck GEF vollenden. Nun wäre

△ ABC = △ GEF
weil BC = EF
und AG ♯ BF.

Es ist aber △ ABC = △ DEF, und es wäre also △ DEF = △ GEF, welches unmöglich ist. Fiele sie aber zweytens ausserhalb AD und BF, wie Fig. 98; so könnte man ED verlängern, bis sie die durch A gezogene und der BF parallele Linie in G schnitte, und GF ziehen. Nun wäre

△ ABC = △ GEF
weil BC = EF
und AG ♯ BF

Es ist aber △ ABC = △ DEF, und es wäre also △ GEF = △ DEF, welches ebenfalls unmöglich ist.

L. Bis jetzt haben wir Parallelogramme mit Parallelogrammen, und Dreyecke mit Dreyecken verglichen. Nun müssen wir auch die Parallelogramme und Dreyecke unter einander vergleichen. Wie groß ist also ein Dreyeck,

das

das mit einem Parallogramme einerley Grundlinie hat, und mit ihm zwischen einerley Parallelen steht, gegen dieses Parallelogramm gehalten? Wie groß ist z. B. Fig. 99, wenn darin AE ♯ BC angenommen wird, das Dreyeck EBC gegen das Parallelogramm AC gehalten?

S. Das kann ich nicht bestimmen.

L. Ziehen Sie einmal die Diagonale AC, Fig. 100.

S. Das Dreyeck EBC ist die Hälfte von dem Parallelogramme AC. Denn

$$\Delta ABC = \Delta EBC$$

und $\Delta ABC = \frac{1}{2} AC$

also $\Delta EBC = \frac{1}{2} AC$.

L. Wie groß wird also ein Dreyeck seyn, das mit einem Parallelogramme zwischen einerley Parallelen steht, aber eine noch einmal so grosse Grundlinie hat?

S. Ein solches Dreyeck muß dem Parallelogramme gleich seyn.

L. Fig. 101. steht ein Dreyeck ABC. Versuchen Sie ein Parallelogramm zu machen, welches diesem Dreyecke gleich sey.

S. Ich muß also ein Parallelogramm machen, das mit dem Dreyecke ABC zwischen einerley Parallelen liegt, aber nur eine halb so grosse Grundlinie hat?

L. Recht! Wie wollen Sie aber ein solches Parallelogramm erhalten?

S. Ich theile die Grundlinie des Dreyecks ABC in zwey gleiche Theile, theile z. B. BC

auf

auf diese Art in D, Fig. 102. dann ziehe ich durch A eine Parallellinie mit BC, und aus D eine Parallinie mit AB, so ist ABDF ein Parallelogramm und dem Dreyecke ABC gleich.

L. Gesetzt aber, daß das Parallelogramm, worin Sie das Dreyeck verwandeln sollen, nicht nur dem Parallelogramme gleich, sondern auch ausserdem einem gegebenen Winkel, z. B. den Winkel o Fig. 103 enthalten sollte?

S. (Denkt einige Augenblicke nach.) Dann theilte ich ebenfalls die Linie BC in D in zwey gleiche Theile, legte nun aber an D (Fig. 104.) erst den Winkel o, und verlängerte seinen Schenkel; ferner zöge ich durch A eine Parallellinie mit BC, nemlich AE, und durch C eine andere mit DF.

L. Abermals etwas neues! die Verwandelung einer Figur in eine andere. Dergleichen Verwandelungen können einen ausserordentlichen Vortheil gewähren, indem wir dadurch in den Stand gesetzt werden, die Figuren, deren Untersuchung mit Schwierigkeiten verknüpft ist, in andere gleiche und leichter zu untersuchende zu verändern, und dann statt jener diese zu betrachten. — Jetzt noch einen Satz von der Gleichheit der Parallelogramme unter einander. — Betrachten Sie die 105te Figur. Es ist darin

1. AB ∥ HG ∥ DC, und
2. AD ∥ EF ∥ BC.

Wir

Wir haben hier also vier Parallelogramme, nemlich AK, HF, EG und KC. Die beyden Parallelogramme AK und KC liegen um der Diagonale AC, und werden deswegen auch Parallelogramme um der Diagonale genannt. Die andern beyden Parallelogramme HF und EG aber sind und heissen die Ergänzungen derselben, nemlich zum ganzen Parallelogramme AC. Nun frage ich: wie sind in einem Parallelogramme die Ergänzungen der um der Diagonale liegenden Parallelogramme beschaffen? Denken Sie zuvor sorgfältig nach, denn Sie müssen im Stande seyn, Satz und Beweis ohne alle weiter Hülfe zu finden.

S. (Nachdem er eine Zeitlang nachgedacht hat.) Sie sind gleich. Nach der 10sten Figur beweise ich, daß HF = EG, so:

$\triangle$ ABC = $\triangle$ ACD, denn die Diagonale theilt jedes Parallelograinm in zwey gleiche Dreyecke. Aus gleichem Grunde ist nun

$\triangle$ AEK = $\triangle$ AHK, und also
$\triangle$ABC — AEK = $\triangle$ ACD — $\triangle$AHK, oder
EBCK = HKCD. Da nun ferner
$\triangle$KGC = $\triangle$KFC; so ist auch
EBCK — $\triangle$KGC = HKCD — $\triangle$KFC, oder
EG = HF.

L. Sind nicht etwa in den beyden Parallelgrammen EG und HF, einige Stücke, z. B. Seiten oder Winkel, gleich?

S. Sei-

S. Seiten nicht, aber zwey Winkel. Der Winkel EKG ist gleich dem Winkel HKF, denn es sind Verticalwinkel.

L. Diese Eigenschaft wollen wir in unserer nächsten Unterredung zur Verwandelung eines Parallelogramms in ein anderes mit gleichen Winkeln, aber einer andern und gegebenen Seite benutzen. Heute wollen wir hier stehen bleiben, damit die Menge der durchgenommenen Sätze dem Behalten derselben nicht schade. — Was wir jetzt schon, gegen den Anfang genommen, für Schritte thun können! Sonst hatten wir an einem Satze genug, und bisweilen unterredten wir uns selbst mehreremal darüber; heute haben wir vier Sätze gelernt. Wenn Sie in Ihrem Fleisse fortfahren, so werden Sie künftig mit noch grösserer Geschwindigkeit und Leichtigkeit fortgehen können.

Ein und zwanzigstes Gespräch.

L. Jetzt wollen wir noch einmal die 105te Figur betrachten. — Gesetzt daß darin die Linie AE nach Willkühr kleiner oder grösser angenommen, BC aber, wenn es nöthig wäre, verlängert würde, würde eine durch A und K gezogene und verlängerte Linie gleichwohl jedesmal die BC schneiden?

S. Ja!

S. Ja!

L. Warum?

S. Die Linien EF und BC sind parallel, und AK schneidet die eine derselben EF; wenn man also AK verlängert, so muß sie auch die andere BC schneiden.

L. Wie sind wohl die Linien AE, HK und DF in der 105ten Figur beschaffen? Gleich oder nicht?

S. Sie sind gleich, denn es sind Parallelen zwischen Parallelen.

L. Und nun die beyden Parallelogramme EG und HF noch einmal mit einander zu vergleichen; was kann man von ihnen behaupten?

S. Daß sie gleich sind.

L. Sind blos die ganzen Pakallelogramme einander gleich, oder auch ihre Winkel und ihre Seiten?

S. Auch ihre Winkel sind gleich, aber die Seiten nicht.

L. Wie nun, wenn man anfänglich das Parallelogramm EG allein beschrieben, und darauf die Seite BE bis in A, und die Seite BG willkührlich verlängert, ferner aus A durch K die Linie AK gezogen und so weit verlängert hätte, bis sie die verlängerte BG in C geschnitten, dann durch A eine gerade Linie AHD mit EK, und aus C eine andere CFD mit GK parallel gezogen, und so weit verlängert worden wären, bis sie sich in D geschnitten hätten, und endlich auch EK bis in F, und GK bis in H ver-

längert worden wären; würde man alsdann nicht auch das Parallelogramm HF, welches dem Parallelogramm EG, so wohl ganz genommen, als auch in Ansehung seiner Winkel, gleich ist, erhalten haben?

S. Ja.

L. Wie verwandelt man also ein Parallelogramm, z. B. EG, Fig. 105, in ein anderes, welches ihm gleich ist, und ausserdem auch mit ihm einerley Winkel und eine gegebene Seite hat?

S. Man verlängert die eine Seite des Parallelogramms EG, z. B. BE, so weit, bis die Verlängerung der gegebenen Seite gleich ist, z. E. bis in A, wenn die gegebene Seite so groß als EA ist. Ist dies geschehen, so zieht man aus A durch K eine gerade Linie AK, und verlängert dieselbe, desgleichen verlängert man auch die Seite BG, bis sie die verlängerte AK in C schneidet. Nun zieht man durch A eine Linie mit EK, und aus C eine Linie mit GK parallel, und verlängert sie so weit, daß sie sich in D schneiden. Endlich verlängert man EK bis F, und GK bis H. Das Parallelogramm HF, welches auf diese Art entsteht, ist dem Parallelogramm EG gleich, hat mit demselben einerley Winkel, und es befindet sich darin die gegebene Seite.

(Der Lehrling mußte hierauf die beschriebene Verwandelung der Parallelogramme einigemal wirklich vornehmen.)

L. Ge-

L. Gesetzt nun daß Ihnen das Dreyeck C Fig. 106, der Winkel D und die Linie AB gegeben worden wäre, und Sie sollten das Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln, welches dem Dreyecke C gleich wäre, ausserdem aber auch den Winkel D und die Seite AB enthielte; wie würden Sie das machen?

S. Ich verwandelte erst das Dreyeck C in ein Parallelogramm, welches ihm gleich wäre und den Winkel D enthielte, und alsdann machte ich aus diesem Parallelogramme ein anderes, welches eben die Winkel und die Seite AB hätte.

(Auch dies mußte der Lehrling einigemal versuchen.)

L. Wie aber, wenn Ihnen das Viereck ABCD Fig. 107, und der dabey stehende Winkel E gegeben worden wäre, und man von Ihnen verlangte, daß Sie ein Parallelogramm machen sollten, welches diesem Vierecke gleich wäre, und den Winkel E enthielte? Würden Sie Sich auch hier zu helfen wissen?

S. Nein.

L. Theilen Sie doch das Viereck ABCD durch die Diagonale in zwey Dreyecke, wie Fig. 108.

S. Es ist ja wahr. Ich theile also erst das Viereck durch eine Diagonale in zwey Dreyecke, und verwandele darauf diese Dreyecke in Parallelogramme, welche den gegebenen Winkel enthalten.

L. Das ist noch nicht hinlänglich; denn Sie sollen nicht zwey, sondern ein Parallelogramm hervorbringen.

S. Also muß ich noch diese beyden Parallelogramme in eins verwandeln?

L. Ganz recht.—Betrachten Sie einmal die 109te Figur. In dieser Figur sind zwey Parallelogramme FH und GM an einander gesetzt worden, und machen so das Parallelogramm FM. Wäre dies auch möglich gewesen, wenn sie nicht die eine Seite GH gleich gehabt hätten?

S. Nein.

L. Wenn Sie also die beyden Parallelogramme, worin Sie die Dreyecke ABD und BDC Fig. 108. verwandeln wollten, auf gleiche Art an einander setzen wollen, wie müssen Sie die Parallelogramme Sich dazu machen?

S. So, daß in beyden eine Seite gleich ist.

L. Können Sie das?

S. Ja, wir haben die Art und Weise davon eben erst betrachtet.

L. Wie müssen ferner Fig. 109 die Winkel GHM und FKM beschaffen seyn?

S. Gleich, denn sonst wäre GH nicht parallel mit FK.

L. Nun werden Sie im Stande seyn, die vorhin aufgeworfene Frage zu beantworten.

S. Ich theile erst das Viereck durch eine Diagonale in zwey Dreyecke, und verwandele

diese Dreyecke in Parallelogramme, welche den gegebenen Winkel enthalten. Ist dies geschehen, so verwandele ich noch das eine dieser Parallelogramme in ein solches, welches eine Seite des andern Parallelogramms enthält, und lege darauf diese beyden Parallelogramme von gleichen Winkeln und einer gleichen Seite mit der gleichen Seite an einander.

(Der Lehrling verwandelt nun einige Vierecke wirklich in Parallelogramme, welche jenen Vierecken gleich sind, und einen gegebenen Winkel enthalten.)

L. Fig. 110. ist eine gerade Linie AB gezogen. Wie würden Sie darauf ein Quadrat beschreiben? Ueberlegen Sie nur genau was von Ihnen gefordert wird. Sie sollen nemlich ein Viereck machen, worin alle Seiten so groß als AB, und alle Winkel rechte Winkel seyn sollen.

S. Ich muß also auf AB aus A oder B eine senkrechte Linie setzen, und sie so groß machen als AB.

(Dies geschieht, und es entsteht die 111te Figur.)

L. Wie nun weiter? Bedenken Sie, daß auch in einem Quadrate die gegenüber stehende Seiten parallel seyn müssen.

S. Ich ziehe also aus D mit AB, und aus B mit AD Parallellinien.

(Indem dies gethan wird, entsteht die 112te Figur.)

L. Ist dies nun ein Quadrat?

S. Ja, denn AB = AD, AB = DE und AD = BE, und also auch AB = BE, die Winkel aber sind insgesammt rechte Winkel.

L. Wenn es nun blos darum zu thun ist, ein Quadrat zu erhalten, so darf man nur, nachdem man AD senkrecht auf AB gesetzt und AB gleich gemacht hat, aus D und B mit dem Halbmesser AB ein Paar Bogen beschreiben, die sich schneiden, und nach dem Schneidungspunkte aus D und B gerade Linien ziehen. In unserer nächsten Unterredung können und wollen wir nun uns mit der Vergleichung der Quadrate unter einander beschäftigen.

Zwey und zwanzigstes Gespräch.

L. Unter allen Figuren, welche in der Mathematic betrachtet werden, ist keine leichter zu bestimmen, als das Quadrat. Die Winkel eines Quadrats sind insgesammt rechte Winkel, und der rechte Winkel ist unter allen Winkeln derjenige, dessen Grösse man zuerst genau kennen lernt, und auch am leichtesten genau sich vorstellen kann, daher er eben zum Maaße aller übrigen Winkel angenommen worden ist. Was die Seiten des Quadrats betrifft, so sind sie alle gleich, und es darf also nur die eine bekannt seyn, so kennt man sie alle. So bald also nur

die

die Grösse Einer Seite eines Quadrats angegeben ist, so ist man im Stande, sich das ganze Quadrat zu beschreiben, und seine Grösse sich gehörig vorzustellen. Man hat daher, und mit Recht, das Quadrat zum Maaßstabe aller übrigen Figuren angenommen, und vergleicht, wenn man sich die Grösse einer Figur genau vorstellen will, es mögen Quadrate oder andere Figuren seyn, dieselben mit einem bekannten Quadrate. Zu diesem Ende aber muß man von der Wahrheit verschiedener Sätze überzeugt seyn, welche theils die Vergleichung der Quadrate unter einander, theils die Verwandlung anderer Figuren in Quadrate, die ihnen gleich sind, betreffen. Der wichtigste darunter, der daher auch als der Hauptsatz der Mathematic betrachtet wird, ist der, von seinem Erfinder Pythagoras, so genannte pythagorische Lehrsatz, mit dem wir uns heute beschäftigen wollen. Er heißt: In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, so groß als die beyden Quadrate der Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, zusammen genommen. Was müssen Sie zur Betrachtung dieses Lehrsatzes sich für eine Figur zeichnen?

S. Ein rechtwinkliges Dreyeck.

L. Und ausserdem?

S. Die Quadrate der Seiten dieses Dreyecks.

L. Es müssen aber diese Quadrate über den Seiten des Dreyecks selbst beschrieben werden, so wie solches hier, Fig. 113 geschehen ist. Nach dieser Figur sind also.

Dat. BAC = R; und

Th. □BE = □ BG + □ AK. Natürlicher Weise muß hier ein Theil des □ BE gleich seyn dem □ BG, und der andere gleich dem □ AK. Diese Theile des □ BE erhält man, wenn man aus der Spitze A des rechten Winkels BAC auf die gegenüber stehende Seite eine perpendiculäre Linie zieht, und dieselbe bis zur gegenüber stehenden Seite DE des □ BE verlängert. Betrachten Sie nun die 114 Figur, worin dies geschehen ist, und wo Sie also nun zu beweisen haben,

1. daß das Rect. BL = □ BG, und
2. daß das Rect. CL = □ AK. Werden Sie wohl ohne weitere Hülfslinien zum Zwecke kommen?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Nein.

L. Ich will Ihnen also zu dem ersten Satze: Rect. BL = □ BG die nöthigen Linien AD und FC ziehen. Hier, Fig. 115, ist es geschehen. Finden Sie in dieser Figur nicht etwa gleiche Stücke?

S. Ja, das △ ABD = △ FBC.

L. Warum?

S. Weil AB = FB, als Seiten Eines Quadrats, ferner BD = BC, aus eben dem Grunde und ABD = FBC, denn ein jeder dieser Winkel ist gleich einem rechten Winkel und dem Winkel ABC zusammen genommen.

L. Wie verhält sich aber nun das △ ABD zu dem Rect. BL? Betrachten Sie genau die Lage beyder Figuren.

S. Das △ ABD ist halb so groß als das Rect. BL, denn sie haben die Grundlinie BD mit einander gemein, und liegen beyde zwischen den Parallelen BD und AL.

L. Wie verhält sich ferner das △ FBC zu dem □ BG?

S. Das Dreyeck FBC ist auch die Hälfte des □ BG, denn beyde haben die Grundlinie FB gemein, und liegen zwischen den Parallelen FB und GC.

L. Wie ist also die Hälfte des Rect. BL gegen die Hälfte des □ BG gehalten beschaffen?

S. Beyde sind einander gleich; denn

△ ABD = △ FBC, und
△ ABD = ½ Rect. BL, und
△ FBC = ½ □ BG, also
½ Rect. BL = ½ □ BG.

L. Und also nun das ganze Rectangel BL gegen das ganze Quadrat BG gehalten?

S. Auch diese müssen einander gleich seyn, denn ihre Hälften sind einander gleich.

L. Vielleicht sind Sie nun im Stande, ohne weitere Hülfe zu beweisen, daß auch das Rectangel CL gleich ist dem □ AK. die nöthigen Hülfslinien will ich Ihnen ziehen. Es wird die 116te Figur gezeichnet.) Versuchen Sie es nun.

S. Das Rect. CL = □ AK
denn △ ACE = △ BCK
weil AC = CK
CE = BC
und ACE = BCK. AC und CK sind nemlich beyde Seiten des Quadrats AK, und CE und BC beyde Seiten des Quadrats BE, und die Winkel ACE und BCK sind jeder so groß als ein rechter Winkel und der Winkel ACB zusammen genommen. Ferner ist

△ ACE = ½ Rect. CL
und △ BCK = ½ □ AK; denn das △ ACE hat mit dem Rect. CL die Grundlinie EC gemein, und liegt mit ihm zwischen den Parellelen CE und AL; das △ BCK aber hat mit dem □ AK die Grundlinie CK gemein, und liegt mit ihm zwischen den Parallelen CK und BH. Da nun

△ ACE = △ BCK; so muß
auch ½ Rect. CL = ½ □ AK und
also auch Rect. CL = □ AK seyn.

L. Nun werden Sie auch leicht folgern, daß das □ BE gleich sey den □ BG und AK zusammen genommen.

S. Das

S. Das ist leicht. Es ist
Rect. BL = □ BG
und Rect. CL = □ AK
also BL + CL = □ BG + □ AK; oder
□ BE = □ BG + □ AK.

L. Wir wollen diesen Beweis noch einmal überlegen, damit wir ihn uns recht geläufig machen. Was für Hülfslinien haben wir dazu nöthig? Beschreiben Sie aber dieselben blos mit Worten, ohne Benennungen aus der Figur herzunehmen.

S. Zuerst müssen wir aus der Spitze des rechten Winkels des gegebenen Dreyecks auf die gegenüber stehende Seite desselben eine senkrechte Linie ziehen, und dieselbe bis zur gegenüber liegenden Seite des Quadrats dieser Linie verlängern.

L. So erhalten wir aus dem Quadrate der Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, zwey Rectangel, welche einzeln genommen den Quadraten der Seiten gleich sind, welche den rechten Winkel einschliessen. Was werden ferner für Linien erfordert? Betrachten Sie die 115te und 116te Figur.

S. Ausserdem muß man aus der Spitze des rechten Winkels des gegebenen Dreyecks noch zwey gerade Linien nach den gegenüber stehenden Winkeln des Quadrats der größten Seite ziehen.

L. Und endlich.

S. Noch zwey Linien aus den Spitzen der spitzigen Winkel des gegebenen Dreyecks nach den gegenüber liegenden Winkeln der Quadrate der kleinern Seiten desselben.

L. Und in welcher Ordnung muß darauf der Beweis geführet werden?

S. Man beweiset stückweise, daß die beyden Rectangel, in welche das Quadrat der größten Seite getheilt worden, den Quadraten der kleinern Seiten gleich sind, und schließt alsdann daraus, daß das ganze Quadrat der grössern Seite den Quadraten der beyden kleinern Seiten zusammen genommen gleich ist.

L. Wie beweist man von den gedachten beyden Rectangeln, daß sie einzeln genommen den Quadraten der kleinern Seiten gleich sind?

S. Durch die gezogenen Hülfslinien erhält man Dreyecke, welche theils den Hälften der Rectangel, worin das Quadrat der größten Seite des Dreyecks getheilt worden, theils den Hälften der Quadrate der kleinern Seiten gleich sind. Von jedem Paare dieser Dreyecke, das auf einer Seite liegt, beweist man, daß sie gleich sind, und schließt dann auf die gedachten Hälften, und von diesen auf die Ganzen.

L. Nun denke ich, daß Sie im Stande seyn sollen, Sich nicht nur die nöthigen Hülfslinien selbst zu ziehen, sondern auch den ganzen Beweis im Zusammenhange zu führen. Versuchen Sie es. (Dem Lehrlinge wird ein Dreyeck,

auf

auf dessen Seiten Quadrate beschrieben sind, gegeben, und er zieht die nöthigen Hülfslinien, und wiederholt den Beweis. Es hat aber das rechtwinklige Dreyeck eine andere Lage, als in den vorhin betrachteten Figuren.) Gesetzt nun, daß Ihnen zwey Quadrate z. B. AC und EG Fig. 117 gegeben wären, und von Ihnen verlangt würde, daß Sie ein anderes machen sollten, welches diesen beyden zusammen genommen gleich wäre; wie würden Sie das machen?

S. Ich würde ein rechtwinkliges Dreyeck machen, worin die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, so groß wären, als die Seiten der gegebenen Quadrate AC und EG, und auf der Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber läge, ein Quadrat beschreiben.

L. Recht, Sie können Sich aber dabey des Vortheils bedienen, daß Sie, so wie Fig. 118 geschehen ist, nur die eine Seite des einen Quadrats AC, nemlich DC, so weit verlängern, bis die Verlängerung CI der einen Seite des andern Quadrats EG gleich ist. Die Linie BI ist alsdenn die Seite des gesuchten Quadrats. — Was entstehen nun für Dreyecke, wenn Sie, wie Fig. 119, ein Quadrat AC durch die Diagonale AC theilen?

S. Zwey rechtwinklige Dreyecke;

L. Nicht auch zugleich gleichschenklige Dreyecke?

S. Ja,

S. Ja, denn AD ist gleich DC, und AB gleich BC.

L. Wie groß ist also wohl das Quadrat der Diagonale AC?

S. So groß als die Quadrate der Seiten AD und DC zusammen genommen.

L. Und wie sind die Quadrate der gleichen Seiten AD und DC beschaffen?

S. Sie sind gleich.

L. Also ist auch das Quadrate der Seite AC so groß als das Quadrat der Seite AD oder der Seite DC doppelt genommen. Da nun das Quadrat der Seite AD oder DC gleich ist dem Quadrate ABCD, so können wir daraus die Folge herleiten, daß das Quadrat der Diagonale eines Quadrats noch einmal so groß sey, als dies Quadrat. — Wie werden Sie also, wenn Ihnen ein Quadrat gegeben wird, ein anderes machen, das noch einmal so groß ist?

S. Ich ziehe in dem gegebenen Quadrate die Diagonale, und beschreibe auf derselben ein Quadrat.

L. Bey diesen zur Vergleichung der Quadrate unter einander gehörigen Sätzen können wir es fürs erste bewenden lassen; in der Folge wird sich Gelegenheit finden, ihre Anzahl mit mehrern zu vergrössern. — Jetzt also noch zur Vergleichung der Quadrate mit Rectangeln. — Betrachten Sie die 120te Figur. Es ist darin

KAB = R

AK = DB

AC = CB = BF; desgleichen
AB # KM # EF und
AK # CE # DG # BF. Was ist also CBFE für eine Figur?

S. Ein Quadrat.

L. Und zwar von was für einer Linie?

S. Von der Linie CB.

L. Also von der Hälfte der Linie AB, denn AB ist in C in zwey gleiche Theile getheilt. Was sind ferner ACLK und CBML für Figuren?

S. Rectangel.

L. Gleiche oder ungleiche?

S. Gleiche, denn sie haben gleiche Grundlinie, weil AC = CB und liegen beyde zwischen den Parallelen AB und KM.

L. Finden Sie nicht ausser ihnen noch ein Paar andere gleiche Rectangel?

S. Ja, das Rectangel CN ist gleich dem Rectangel NF, weil sie Ergänzungen von Parallelogrammen um der Diagonale sind.

L. Was ist ADNK für eine Figur?

S. Auch ein Rectangel.

L. Was für Seiten machen dasselbe?

S. Die Seiten AD und AK.

L. Anstatt AK können Sie auch die gleiche Linie DB setzen, und alsdann das Rectangel ADNK das Rectangel der ungleichen Theile der Linie AB nennen, denn AB ist in D in zwey ungleiche Theile getheilt. — Was ist endlich LNGE für eine Figur.

S. Ein Quadrat, und zwar der Seite LN.

L. Oder auch des Stücks CD der geraden Linie AB; denn LN und CD sind als Parallelen zwischen Parallelen gleich. Man kann aber CD auch das Stück der in C in zwey gleiche und in D in zwey ungleiche Theile getheilten Linie AB nennen, welches zwischen den Theilungspuncten enthalten ist. Ist aber auch LNGE wirklich ein Quadrat?

S. Ja, denn LNG ist ein rechter Winkel, weil er ein Verticalwinkel von DNM ist, und LN und NG sind gleich, weil DG gleich LM und DN gleich NM ist.

L. Hieraus läßt sich nun auch herleiten, daß BNE Eine gerade Linie, und folglich die Diagonale des Quadrats CF, und daher CN und NF Ergänzungen der Parallelogramme um der Diagonale sind. Denn der Winkel DNB ist eben so als der Winkel LNE einem halben rechten Winkel gleich, und DNB also mit DNE, weil LND ein rechter Winkel ist, so groß als zwey rechte Winkel. — Welche Rectangel sind, um es nun noch einmal zu wiederholen, in der Figur gleich?

S. Das Rectangel AL ist gleich dem Rect. CM, und des Rectangel CN ist gleich dem Rect. NF.

L. Was folgt daraus, wenn Sie gleiches zu gleichem setzen?

S. Daß das Rectangel AN gleich ist der Figur CBMFGNL.

L. das heißt, wenn Sie es mit Worten ausdrucken?

S. Das Rectangel der beyden ungleichen Theile der Linie, welche in zwey gleiche und zwey ungleiche Theile getheilt worden, ist gleich dem Quadrate ihrer Hälfte, weniger dem Quadrate des Stücks, das zwischen den Theilungspuncten enthalten ist.

L. Wenden Sie einmal diesen Satz auf die Linie BF Fig. 121 an, welche in G, dem Mittelpunkte des über ihr beschriebenen halben Kreises, in zwey gleiche, und in E in zwey ungleiche Theile getheilt ist.

S. Das Rectangel der Linien BE und EF ist gleich dem Quadrate der Linie GF weniger dem Quadrate der Linie GE.

L. Ist nicht das Quadrat der Linie GF auch gleich dem Quadrate der Linie GH?

S. Ja, denn die Halbmesser GF und GH sind gleich.

L. Wie können Sie also ihre Behauptung anders ausdrucken?

S. Das Rectangel der Linien BE und EF ist gleich dem Quadrate der Linie GH weniger dem Quadrate der Linie GE.

L. Und wenn nun HEG ein rechter Winkel ist, wie groß ist dann das Quadrat der Seite HE?

S. So groß als das Quadrat der Seite GH weniger dem Quadrate der Seite GE.

L. Also folgt?

S. Daß das Rectangel der Linien BE und EF gleich ist dem Quadrate der Linie HE.

L. Hier haben wir also eine Vergleichung eines Rectangels mit einem Quadrate. In der Figur ist ED gleich EF, und also das Rectangel BD dem Rectangel der Linien BE und EF, und folglich dem Quadrate der HE gleich. Wenn Ihnen nun das Rectangel BD gegeben wäre, wie würden Sie die Linie HE erhalten?

S. (Denkt eine Zeitlang nach.) Ich müßte die eine Seite des Rectangels BD z. B. BE in F verlängern, so daß EF der andern Seite ED gleich würde, dann über der Linie BF, nachdem sie in zwei gleiche Theile getheilt worden wäre, einen halben Kreis beschreiben, und endlich die Seite DE bis an den Umfang desselben verlängern.

(Der Lehrling muß dieß bey einigen gegebenen Rectangeln wirklich thun.)

L. Sind Sie also nun im Stande ein jedes Rectangel in ein Quadrat zu verwandeln?

S. Ja.

L. Aber auch wohl eine jede andere geradlinige Figur?

S. Ja; denn man kann eine jede geradlinige Figur in ein Parallelogramm mit einem verlangten Winkel, und also auch in ein Rectangel, und alsdann dieses in ein Quadrat verwandeln.

L. Was für wichtige Vortheile haben wir nicht also bis jetzt schon von dem pythagorischen Lehr-

Lehrsatze? gleichwohl werden dieselben in der Folge noch viel beträchtlicher werden. — Nunmehr haben Sie schon wieder einen wichtigen Schritt in der Erlernung der Mathematic gethan, und bey der Aufmerksamkeit und Lernbegierde, die Sie beständig bewiesen haben, kann ich Ihnen nun auch die Hoffnung machen, daß Sie, wenn Sie so fortfahren, von der Mathematic unter ihre Lieblinge werden aufgenommen werden. Ueberdenken Sie nun für Sich alles, was wir von den Parallelogrammen durchgenommen haben, recht fleissig, und suchen Sie auch daraus die Kennzeichen der gleichen Winkel, Seiten, und Figuren Sich recht geläufig zu machen. Je mehr Sie dies thun werden, desto mehr werden Sie Sich den folgenden Theil des zu betretenden Weges erleichtern und angenehm machen.

Verzeichniß einiger Druckfehler.

1. in dem Versuche.

Seite 24. Z. 25 statt Fig. 7 lies Fig. 13
— 79 — 18 — E — — C —

Fig. 15 der ersten Kupfert. muß zwischen den Schenkeln fd und de des Winkels fde der Buchstabe o gesetzt werden.

Fig. 43 der 2ten Tafel muß statt E, B, und statt F, C stehen.

2. in dieser Fortsetzung.

S. 16 Z. 4 muß nach durch statt des Kommas das Abtheilungszeichen stehen.

S. 33 Z. 4 von unten, statt gleich die lies gleich der.

S. 43 Z. 5 muß statt gegen gelesen werden, zogen.

S. 73 Z. 18 muß statt AD gelesen werden DC.

S. 80 Z. 19 statt der lies den.

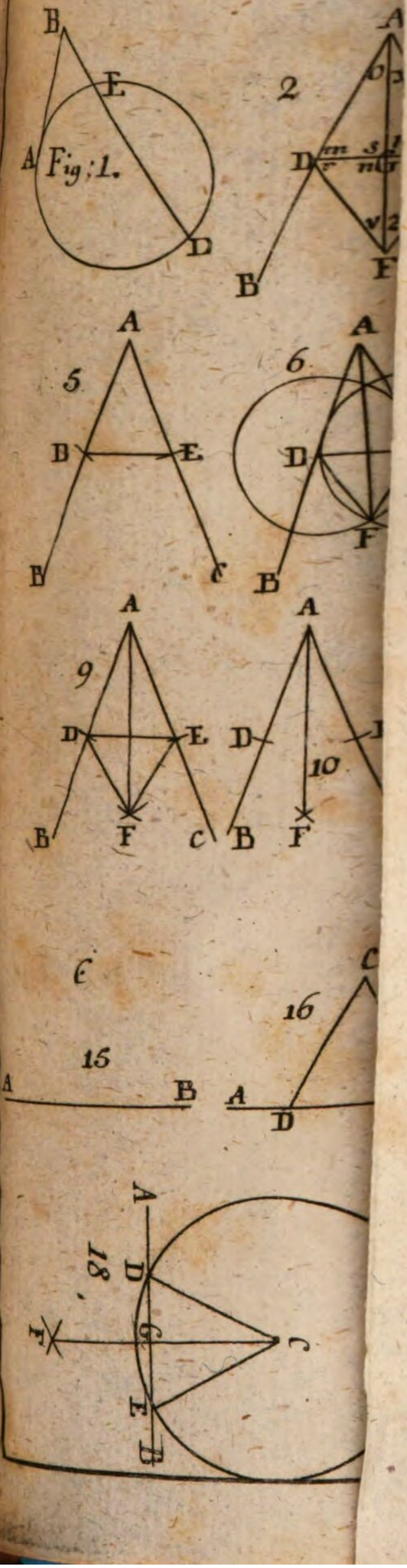
S. 125 Z. 6 von unten steht Parallelogramme statt Parallelogramm.

S 142 Z. 3 anstatt Parallinie lies Parallellinie.

— Z. 8 anstatt einem lies einen.

S. 143 Z. 2 von unten, anstatt Parallelgrammen lies Parallelogrammen.

Sollten ausser diesen noch einige andere Druckfehler sich finden, so bitte solche selbst gütigst zu verbessern.


B
E
A
Fig: 1.
D
2
A
D
B
F
5
A
B
E
B
C
6
A
D
B
F
9
A
D
E
B
F
C
A
D
10
B
F
C
16
15
A
B
A
D
18
A
D
G
F
C
E
B

Verzeichniß einiger Druckfehler.

1. in dem Versuche.

Seite 24. Z. 25 statt Fig. 7 lies Fig. 13
— 79 — 18 — E — — C —

Fig. 15 der ersten Kupfert. muß zwischen den Schenkeln fd und de des Winkels fde der Buchstabe o gesetzt werden.

Fig. 43 der 2ten Tafel muß statt E, B, und statt F, C stehen.

2. in dieser Fortsetzung.

S. 16 Z. 4 muß nach durch statt des Kommas das Abtheilungszeichen stehen.

S. 33 Z. 4 von unten, statt gleich die lies gleich der.

S. 43 Z. 5 muß statt gegen gelesen werden, zogen.

S. 73 Z. 18 muß statt AD gelesen werden DC.

S. 80 Z. 19 statt der lies den.

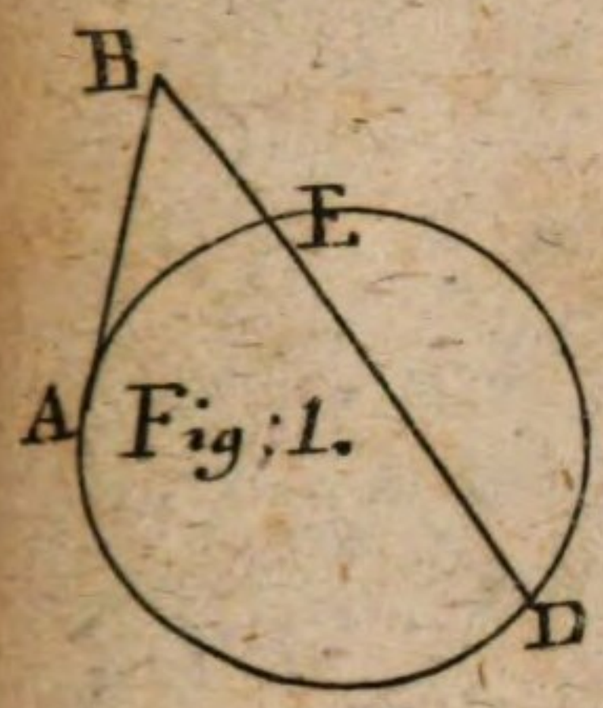
S. 125 Z. 6 von unten steht Parallelogrammme statt Parallelogramm.

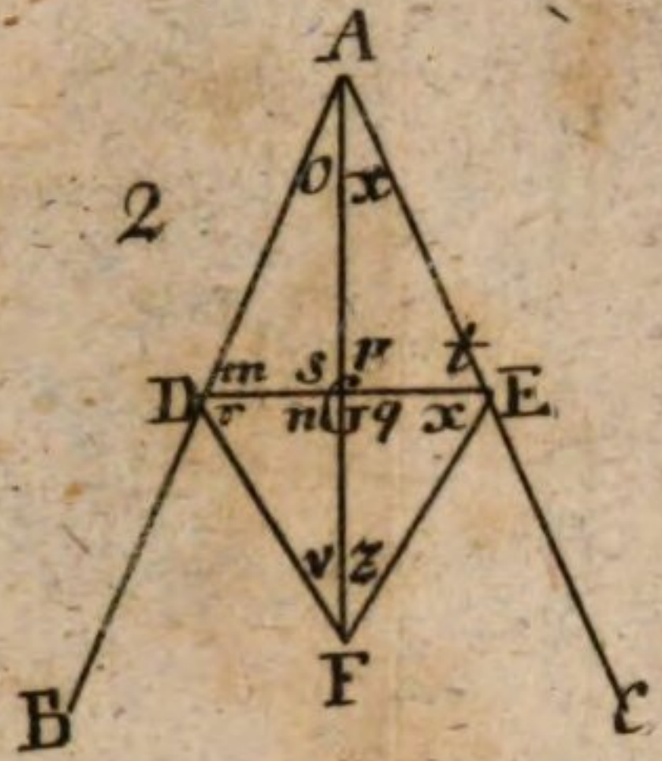
S 142 Z. 3 anstatt Parallinie lies Parallellinie.

— Z. 8 anstatt einem lies einen.

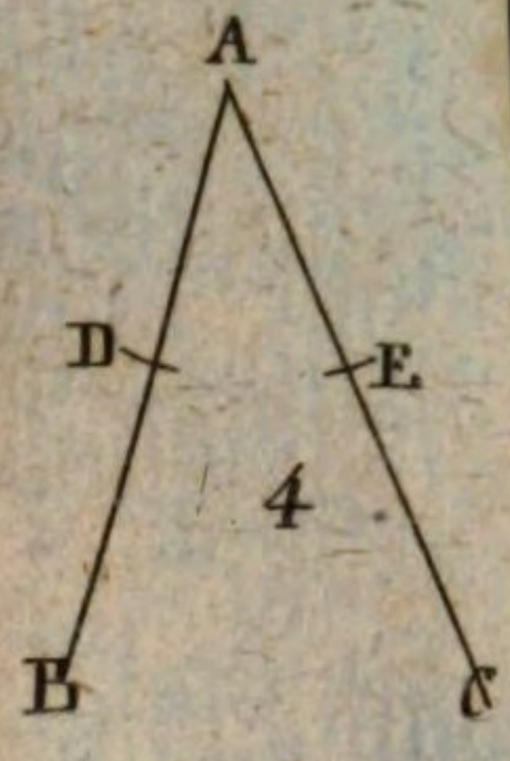
S. 143 Z. 2 von unten, anstatt Parallelgrammen lies Parallelogrammen.

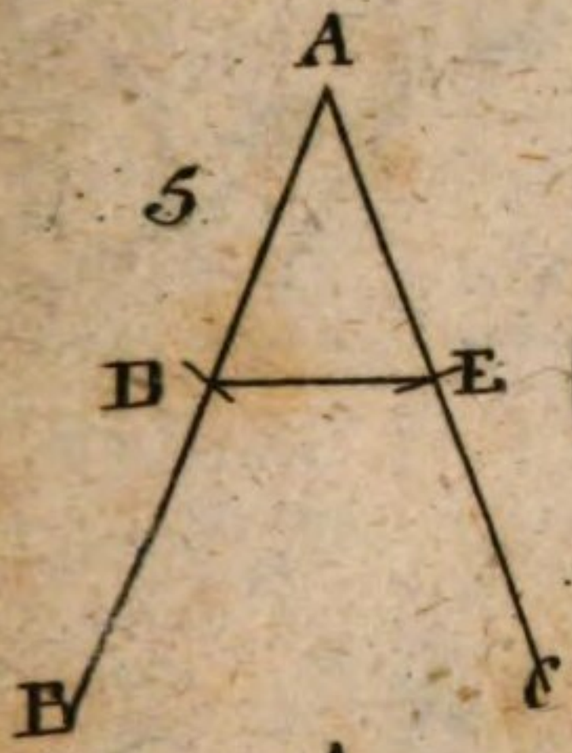
Sollten ausser diesen noch einige andere Druckfehler sich finden, so bitte solche selbst gütigst zu verbessern.

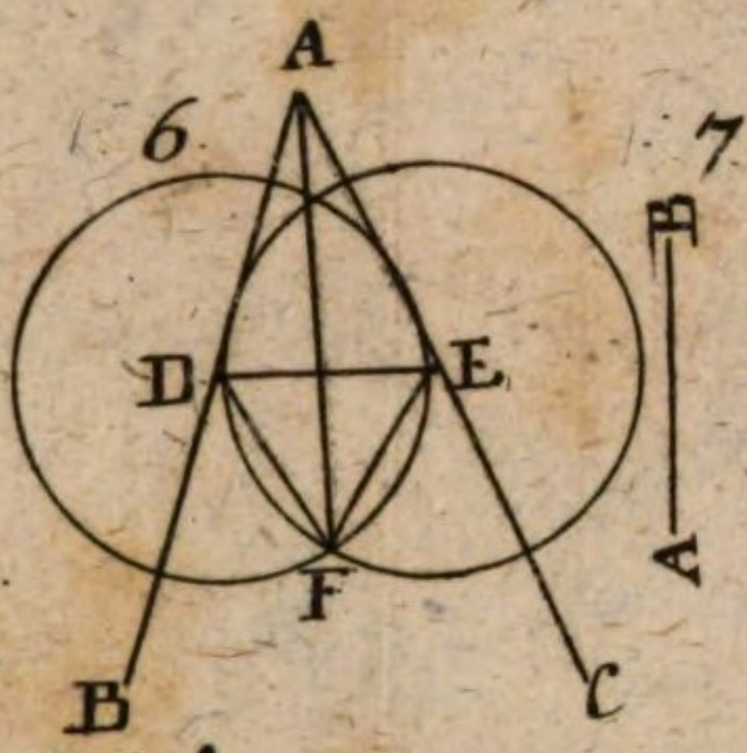

B
E
A
D
Fig: 1.


A
2
o x
m s r t
D E
n q x
v z
F
B
C

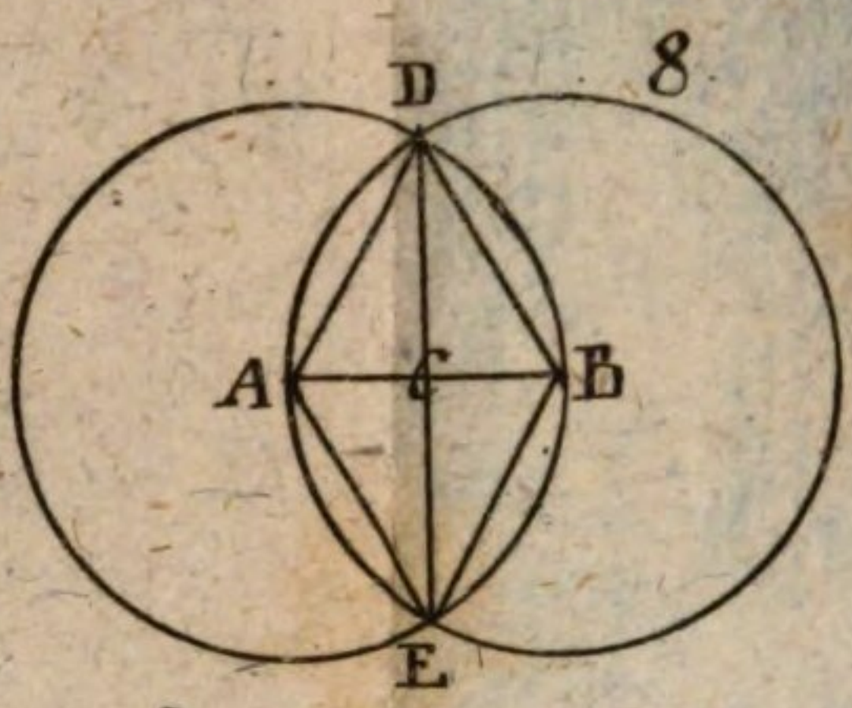
A
3
B
C


A
D
E
4
B
C


A
5
D
E
B
C

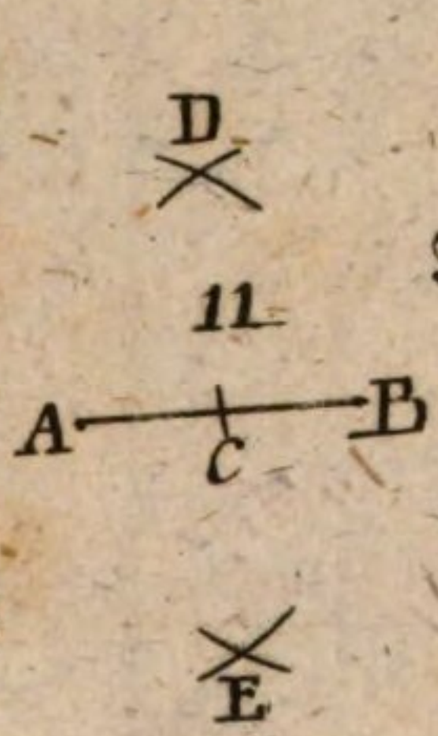

A
6
D
E
F
B
C

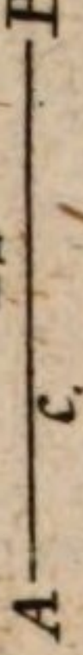
B
7
A

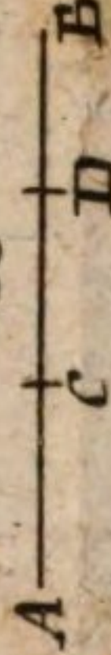

D
8
A
C
B
E

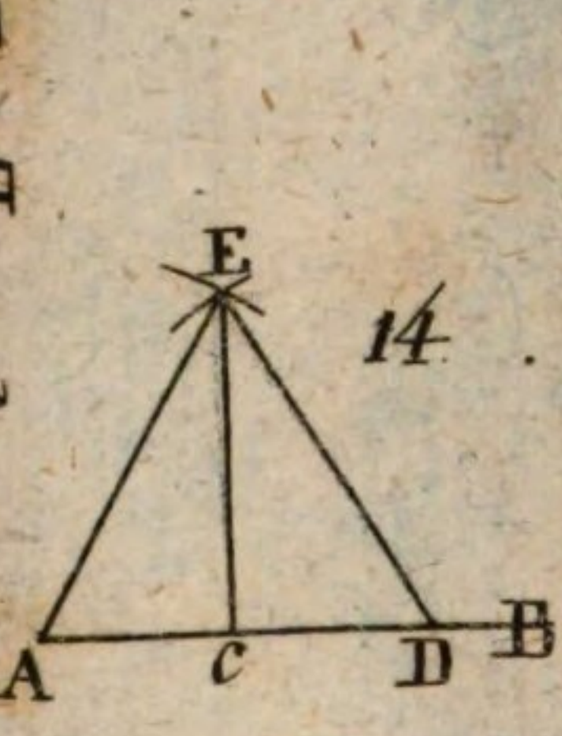
A
9
D
E
B
F
C

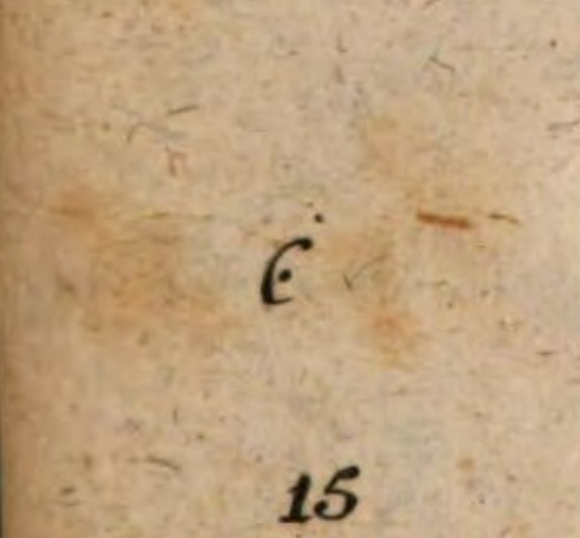
A
D
E
10
B
F
C


D
11
A
C
E


B
12
C
A

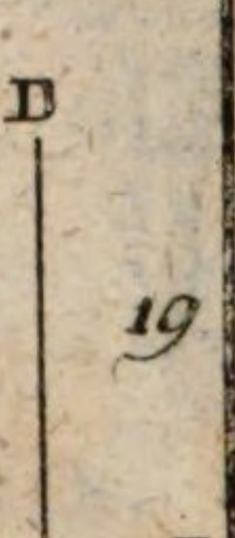

B
13
D
C
A

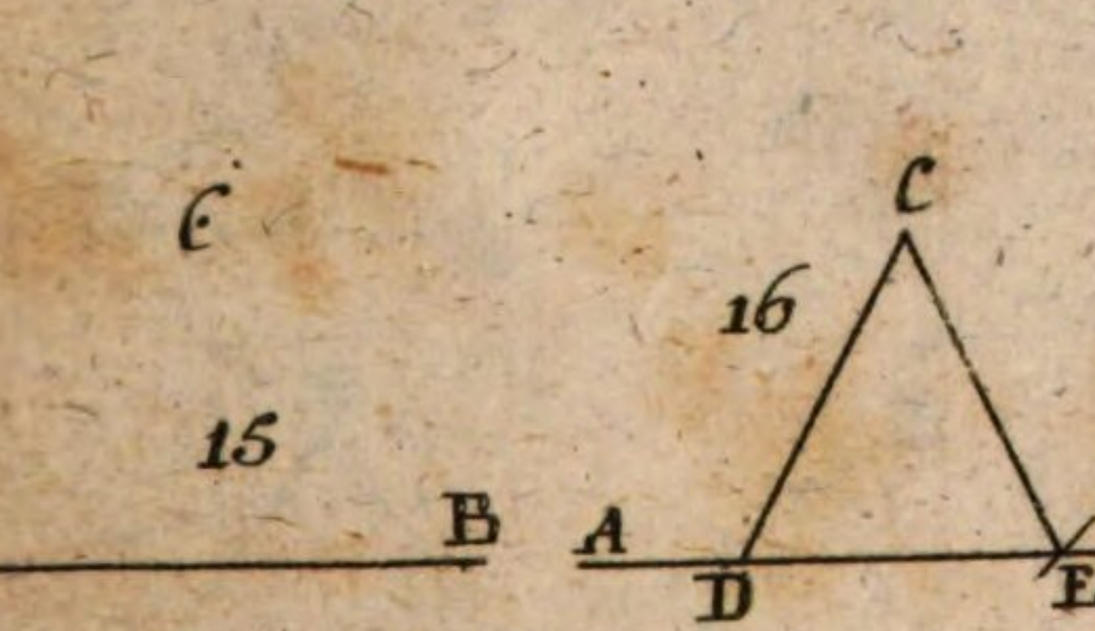

E
14
A
C
D
B


C
15
A
B

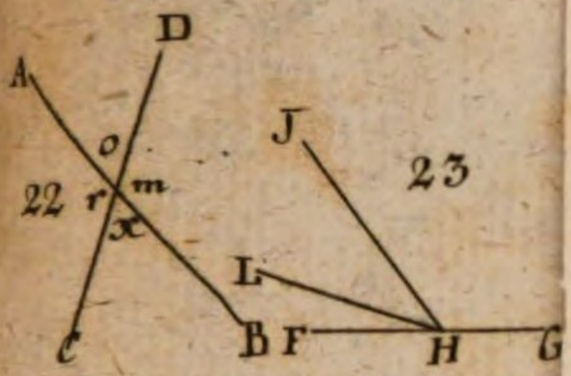
C
16
A
B
D
E

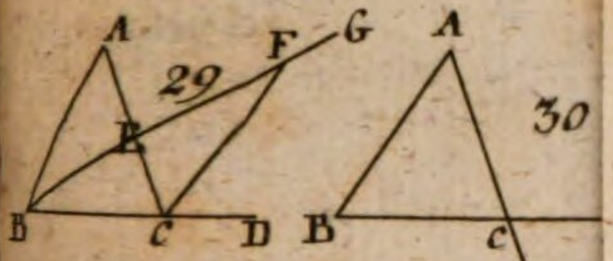
17
B
E
C
G
F
D
A

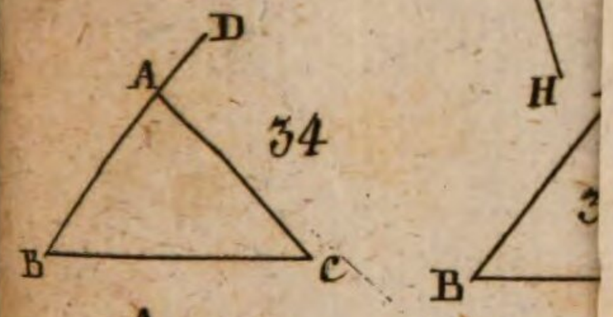

D
19
A
C
B

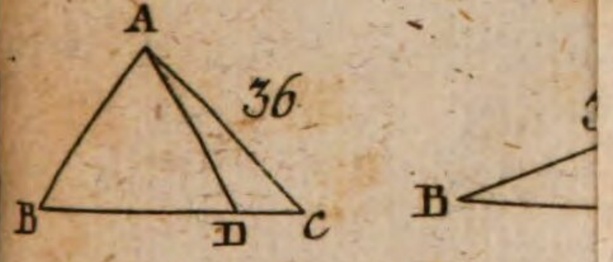

A
18
D
G
F
C
E
B

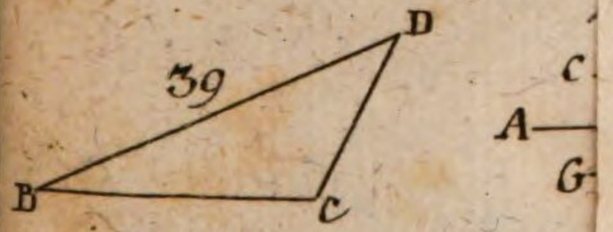
D
20
E
A
C
B
J
21
F
H
G

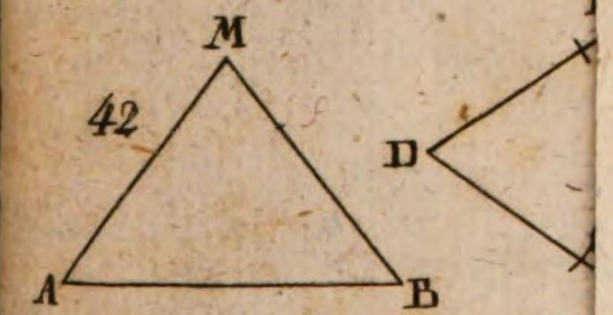

D
A
o
22
r
m
x
C
B
J
23
L
F
H
G

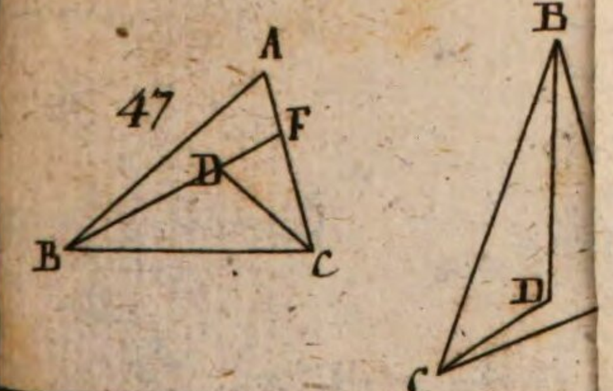

A
F
G
29
E
B
C
D
A
30
B
C


D
A
34
B
C
H
B

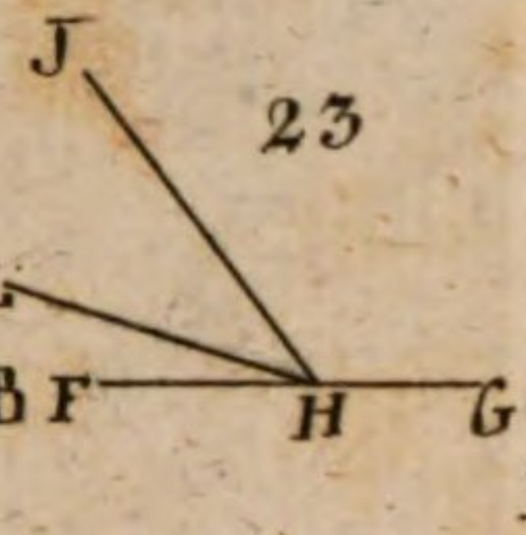

A
36
B
D
C
B

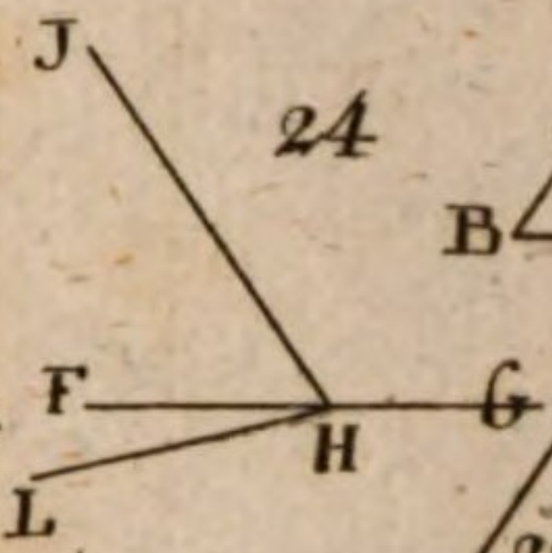

D
39
B
C
C
A
G

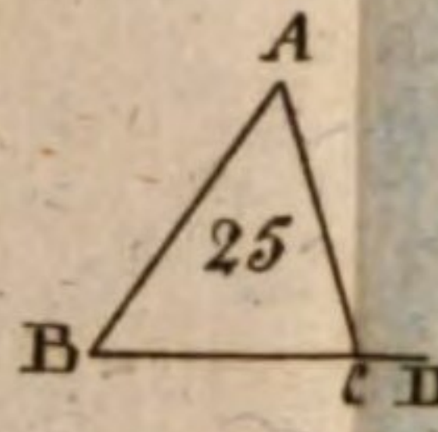

M
42
A
B
D

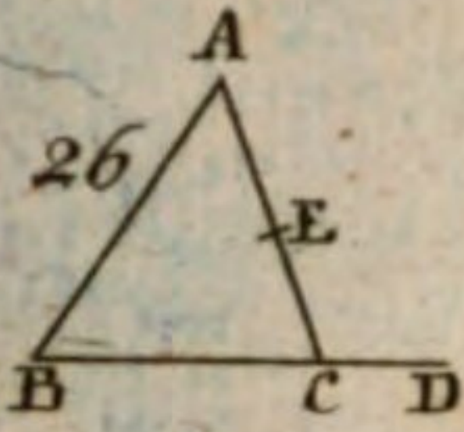

A
47
F
D
B
C
B
D
C

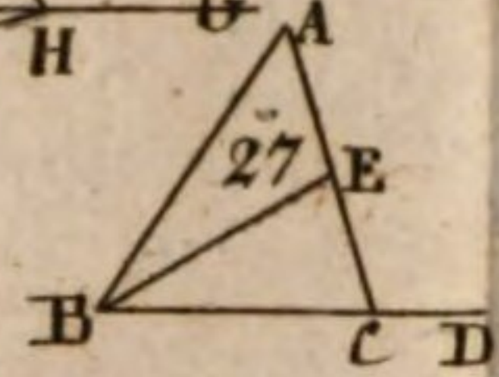
A
D
o
22
r
m
x
C
B

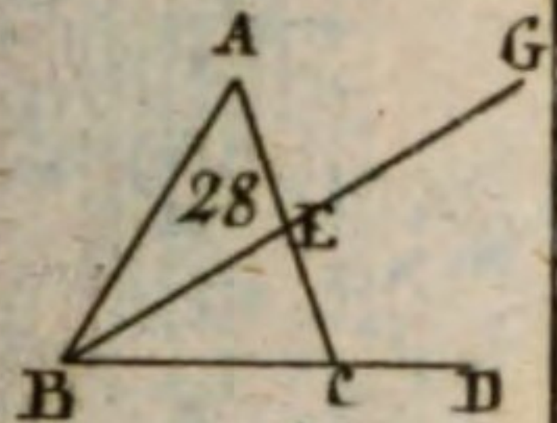

J
23
L
F
H
G

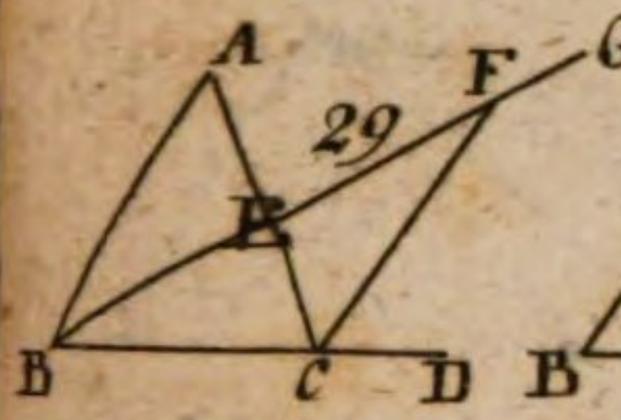

J
24
F
H
G
L

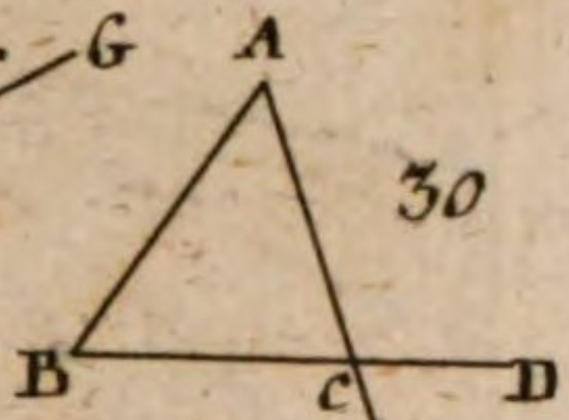

A
25
B
C
D

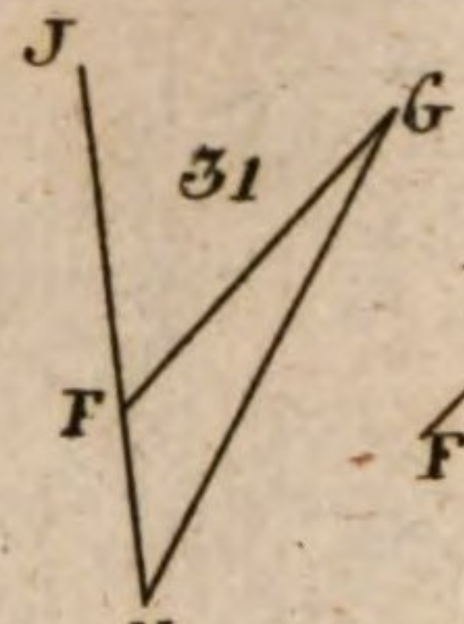

A
26
E
B
C
D

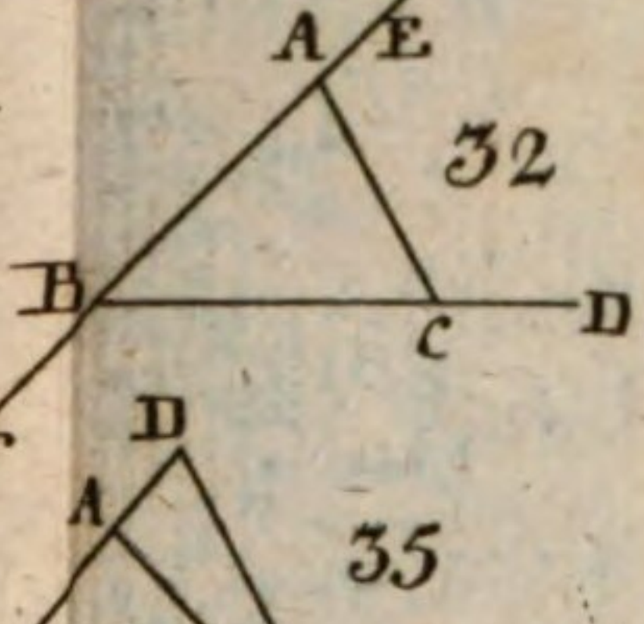

A
G
27
E
B
C
D

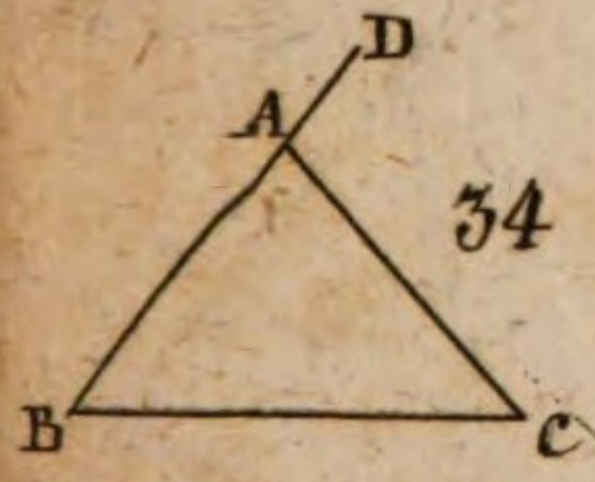

A
G
28
E
B
C
D


A
F
G
29
E
B
C
D

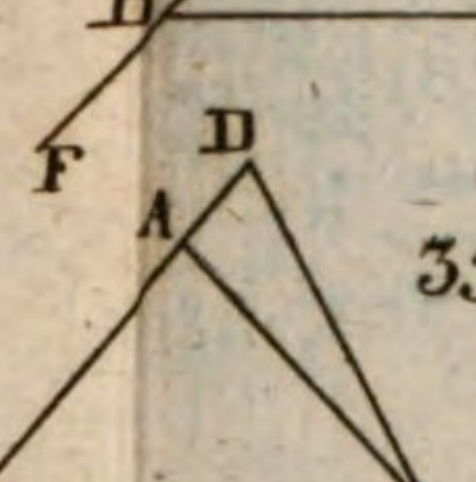

A
30
B
C
D


J
31
G
F
H

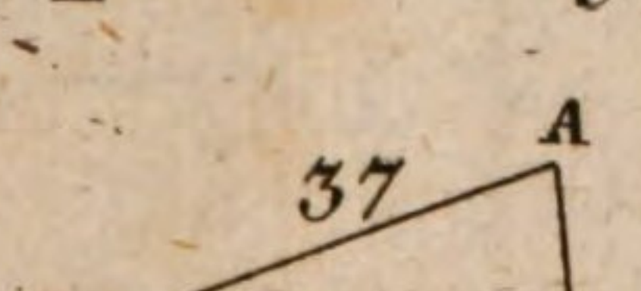

A
E
32
B
C
D

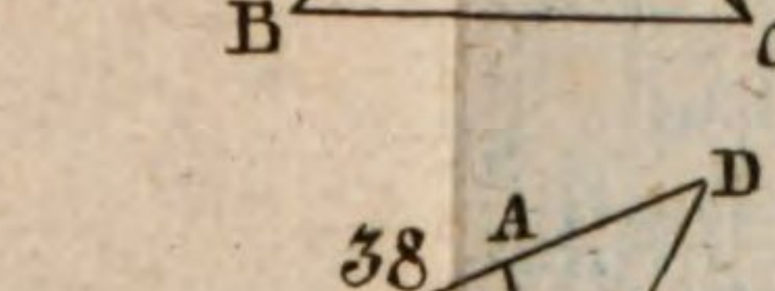

D
A
34
B
C

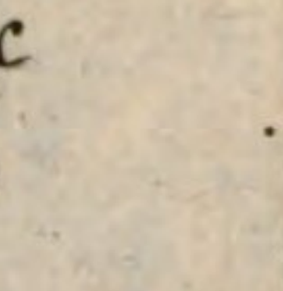
H
A
33
B
C

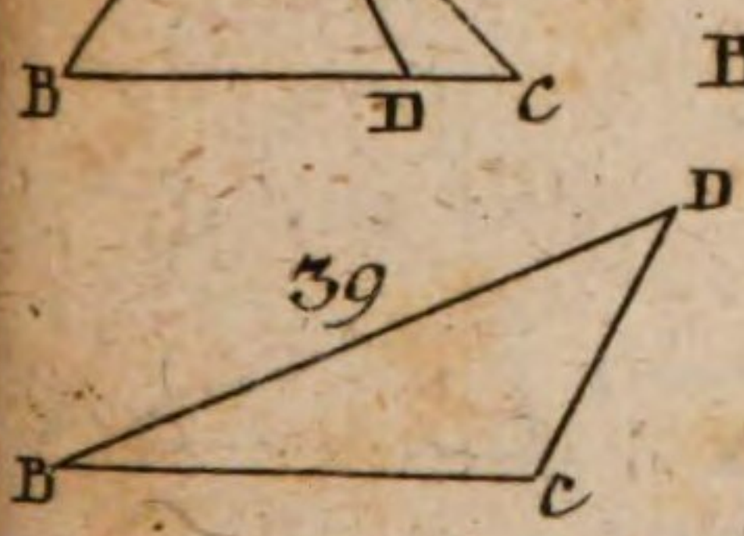

D
A
35
B
C

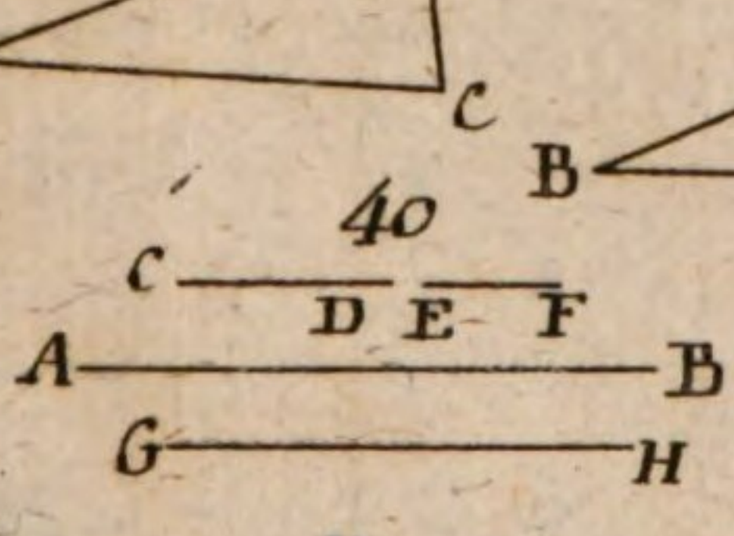
A
36
B
D
C

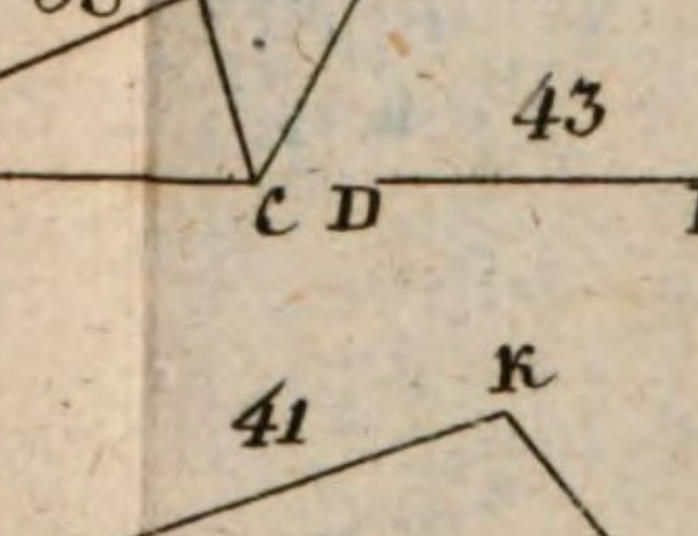

37
A
B
C

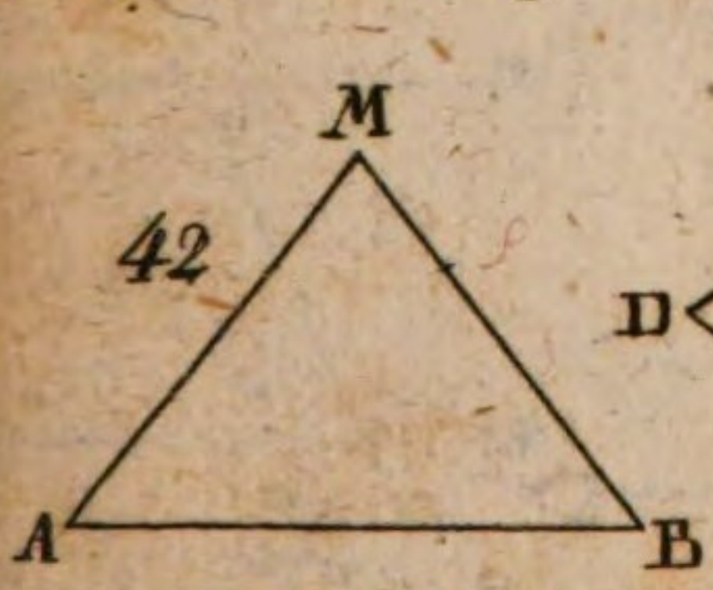

38
A
D
B
C

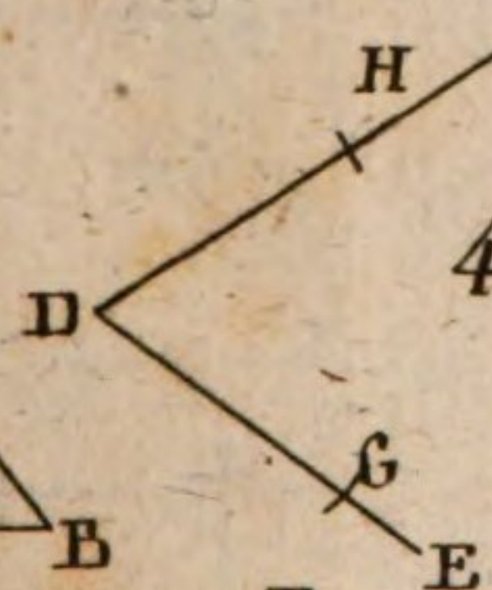

43
D
E

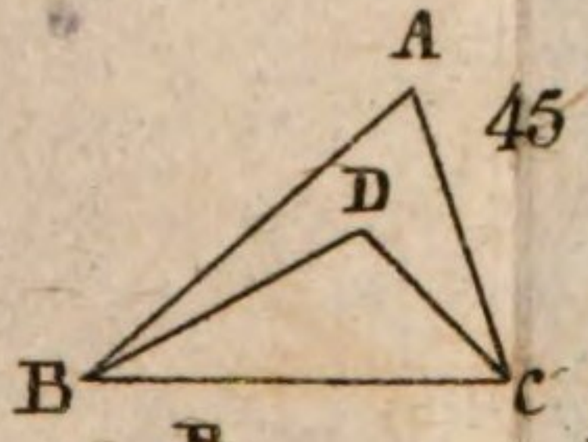

D
39
B
C

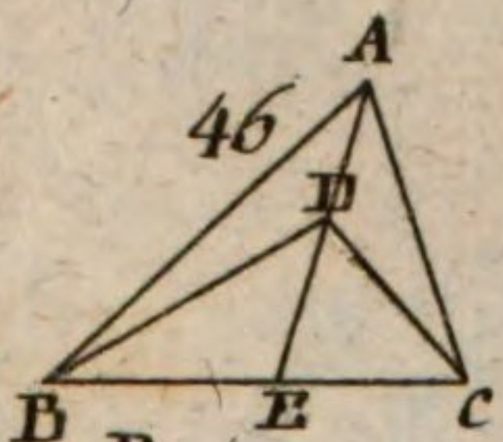

40
C
D
E
F
A
B
G
H

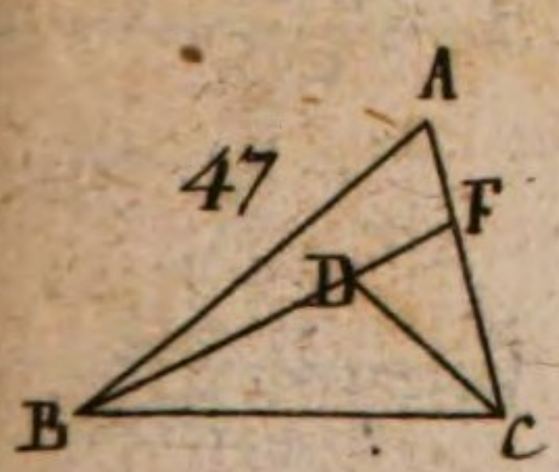

K
41
A
B


M
42
A
B


H
F
44
D
G
E

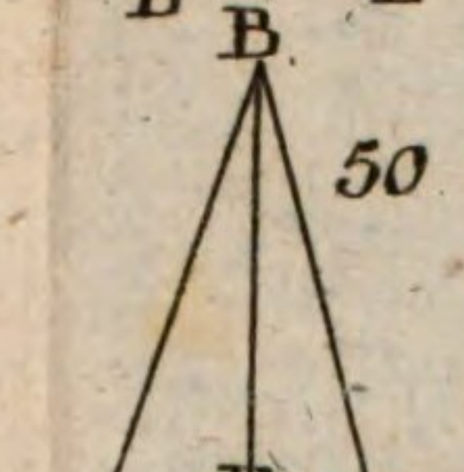

A
45
D
B
C


A
46
D
B
E
C

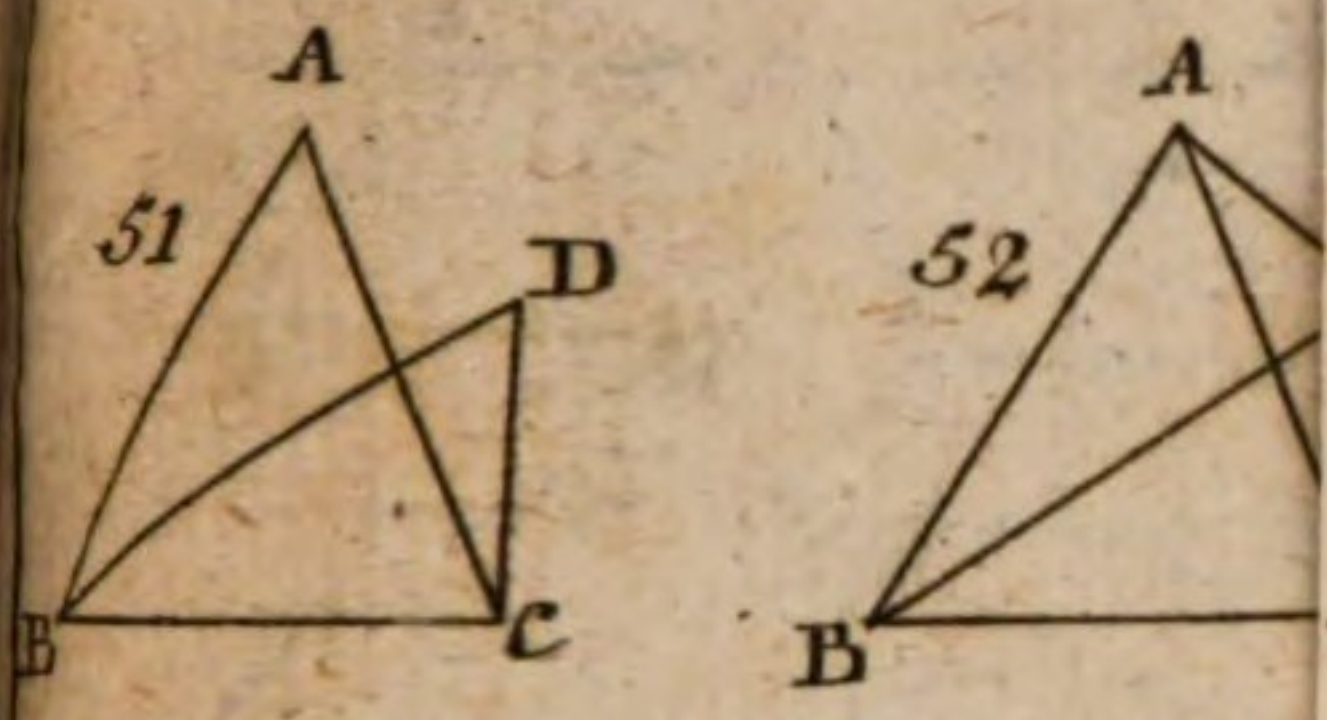

A
47
F
D
B
C

B
48
D
A
C

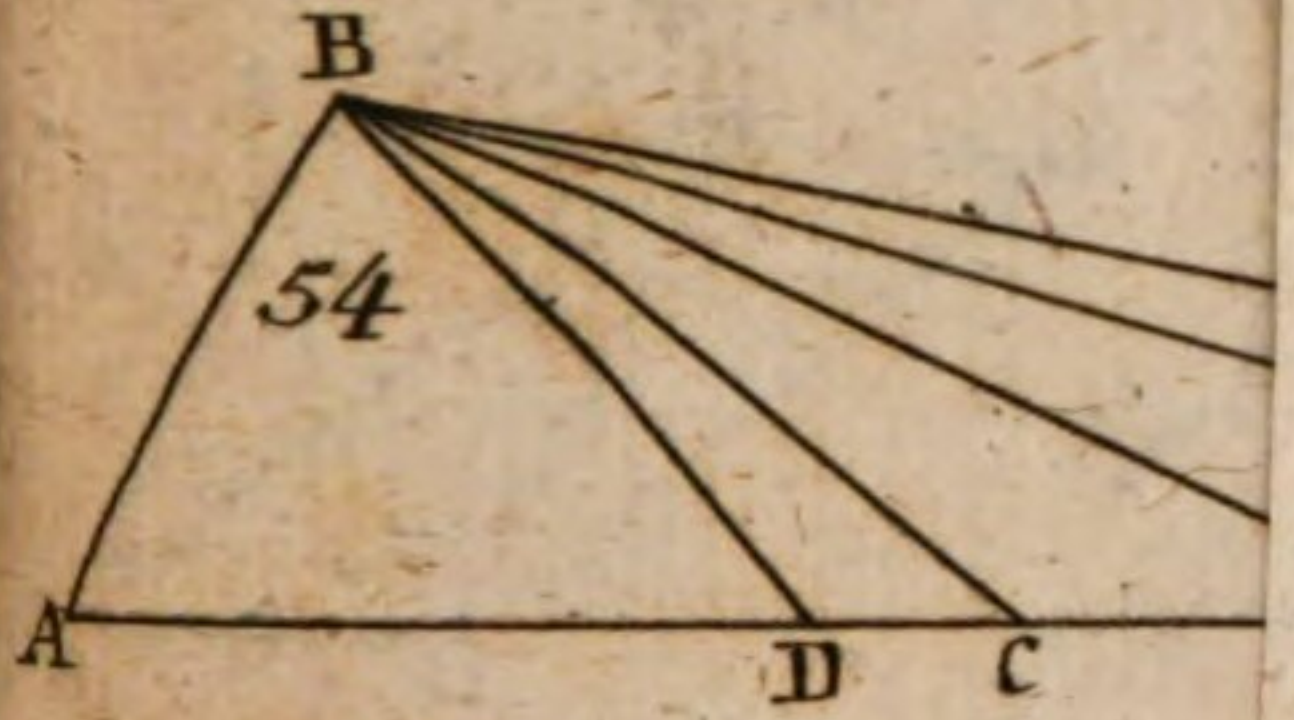
B
49
D
A
C

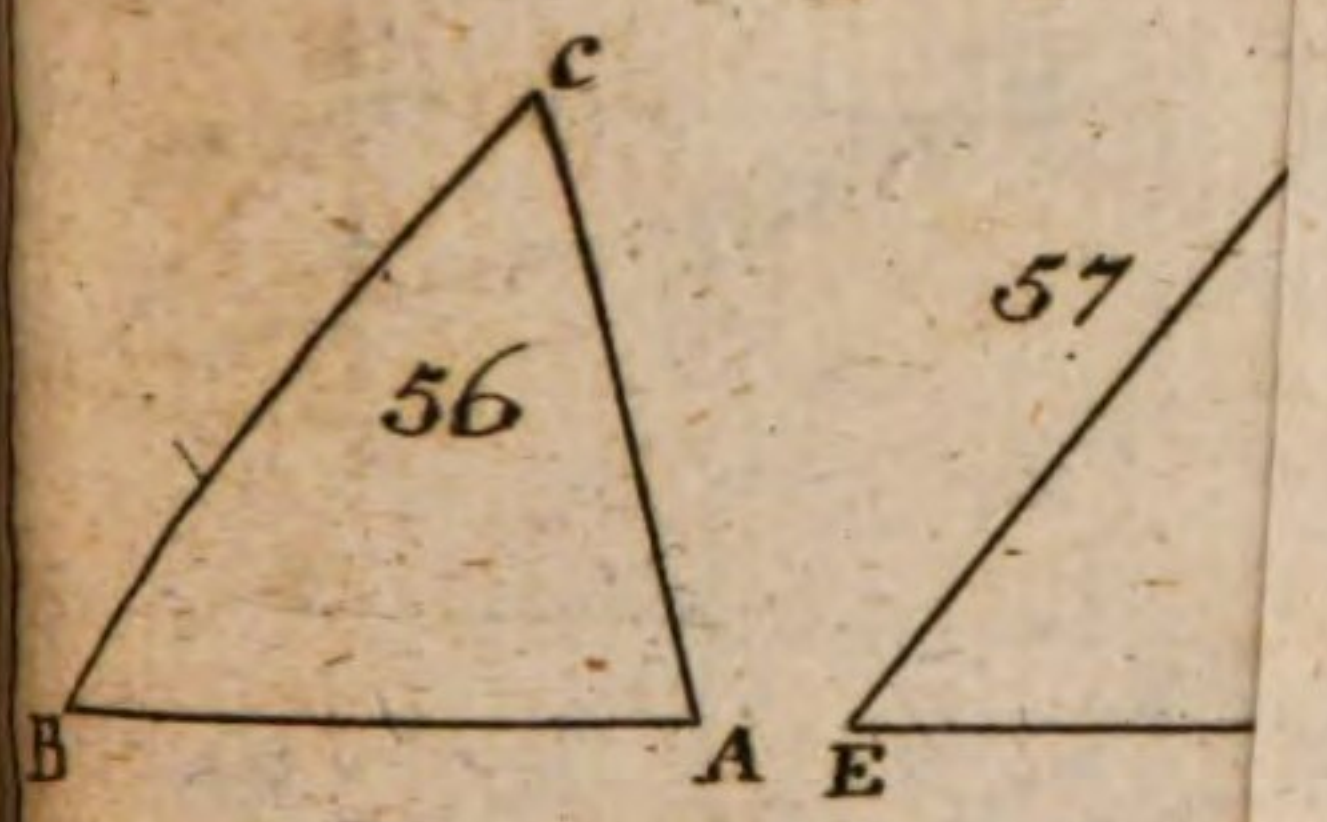

B
50
D
A
C
F
E

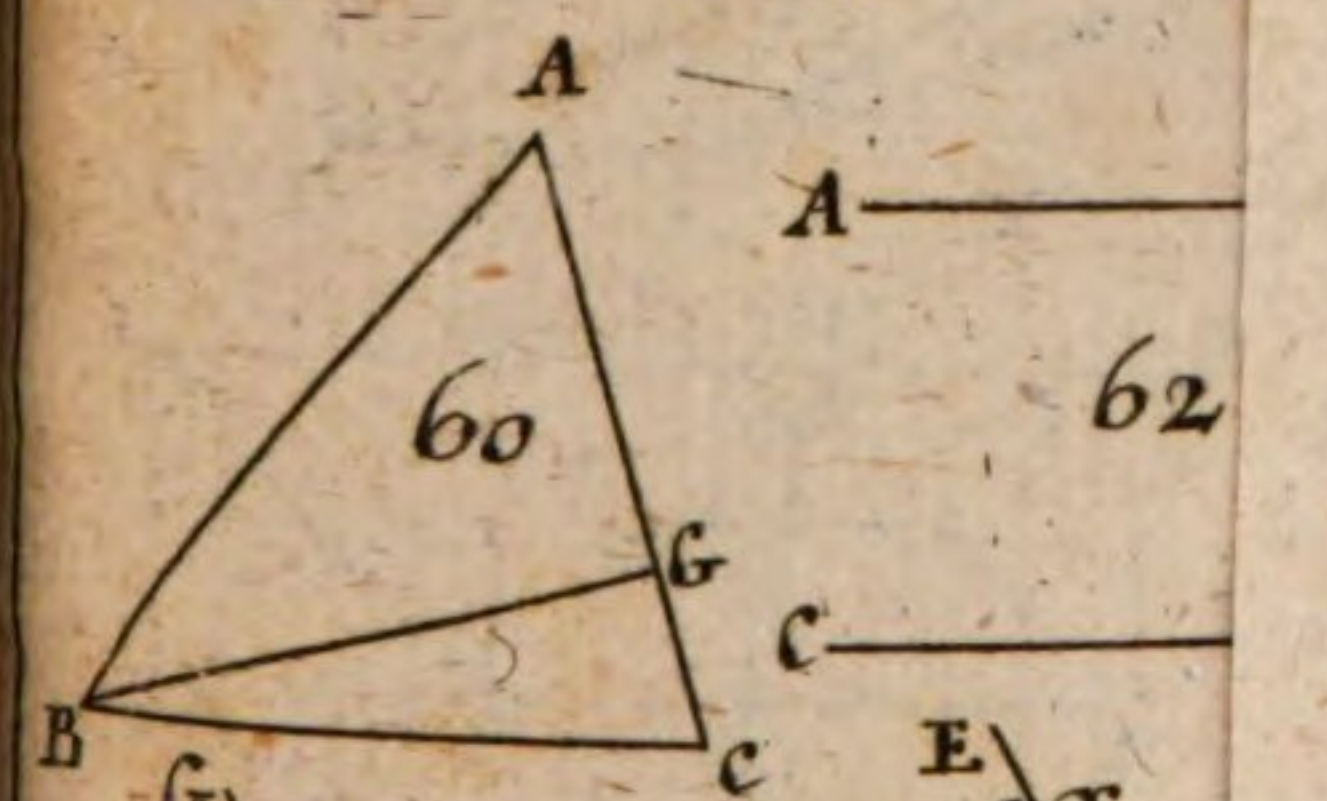
I


A
51
D
B
C

A
52
B


B
54
A
D
C

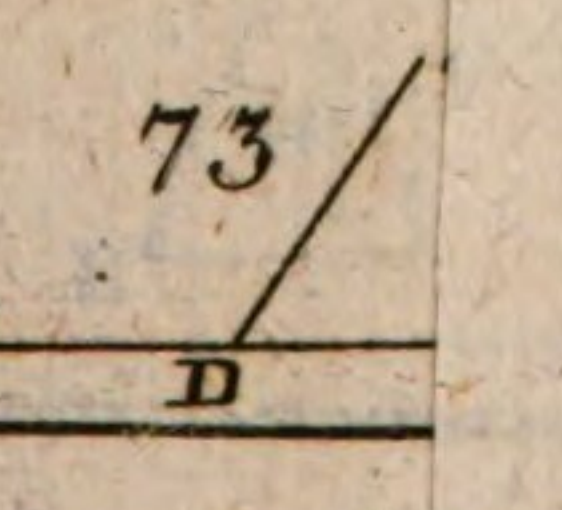

C
56
B
A
57
E


A
60
G
B
C

A
62
C

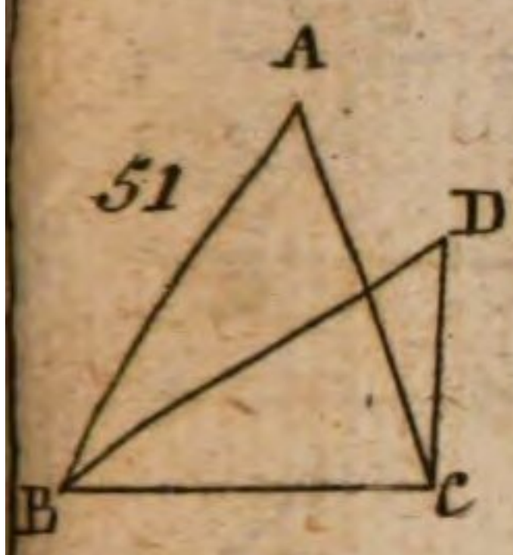
G
A
O
B
65
C
x
D
N
H
J
m
n
K
r
s
67
t
v
L
x
z
M
O
C
72
A
B

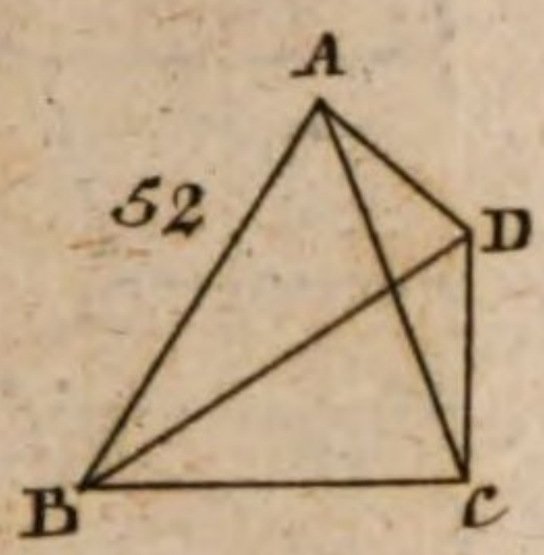
E
o
x
A
y
z
66
C
A
E
68
C
F

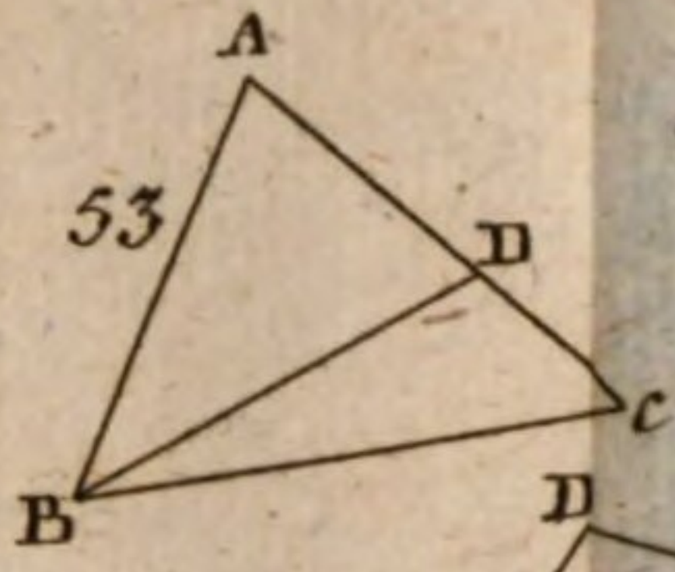

73
A
D

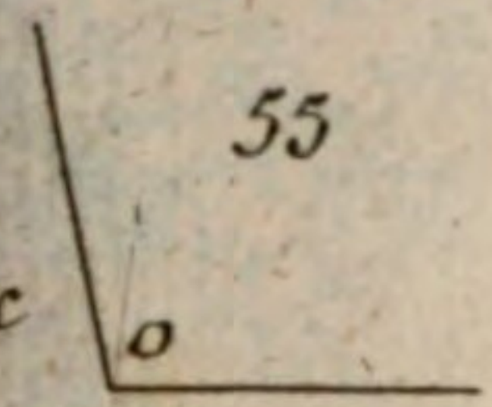
I

2


A
51
D
B
C

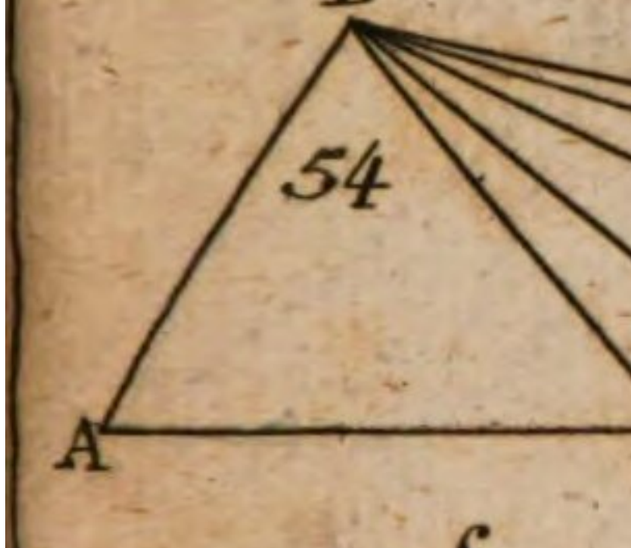

A
52
D
B
C

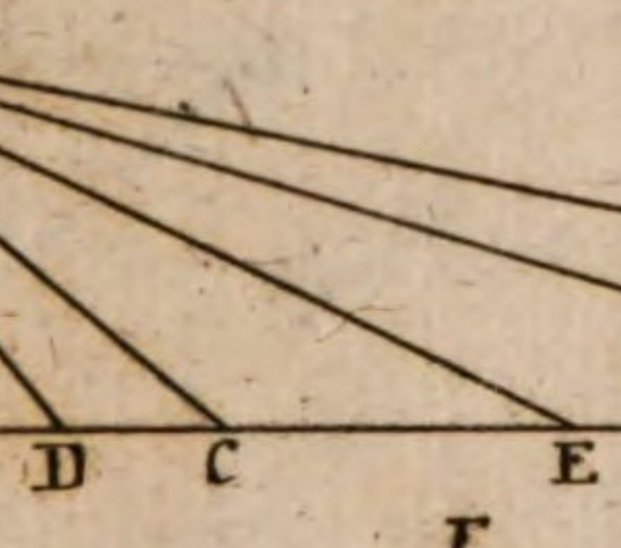

A
53
D
B
C

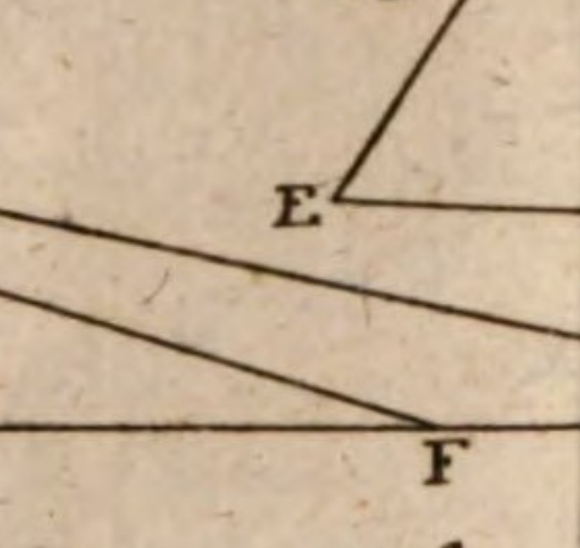

55
O

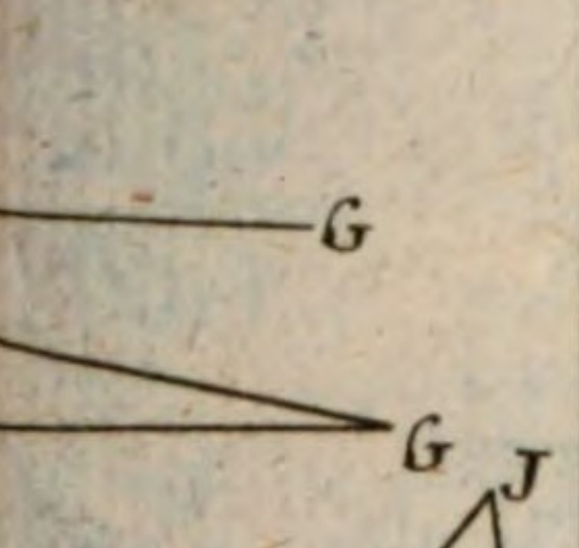
B
54
A
D
C
E
G

D
61
F
E
G

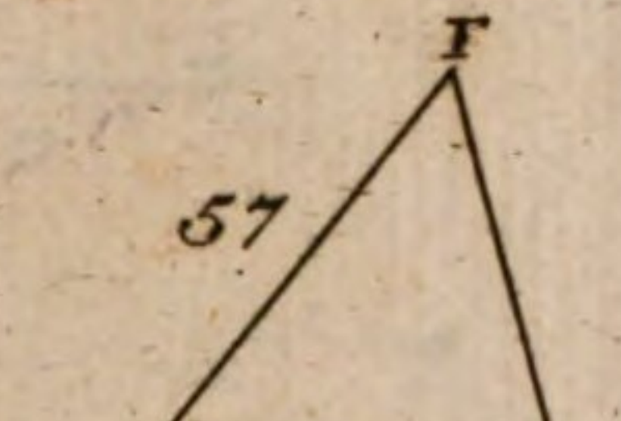

C
56
B
A

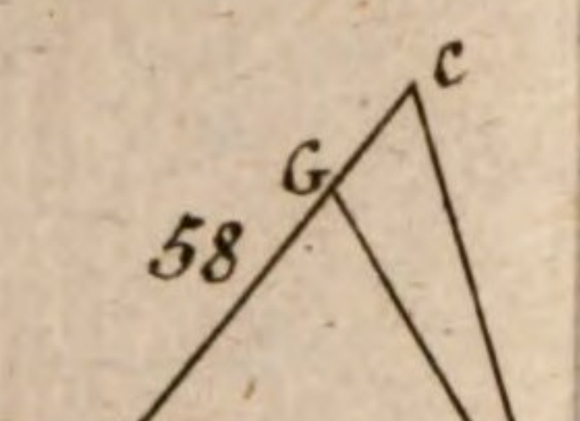

F
57
E
D

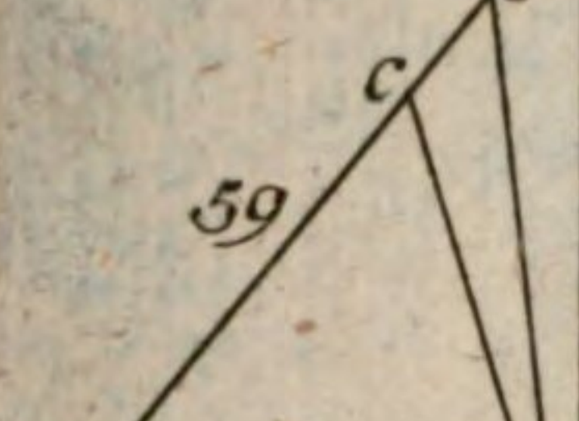

C
G
58
B
A


C
59
B
A

A
60
G
B
C


A
B
62
C
D

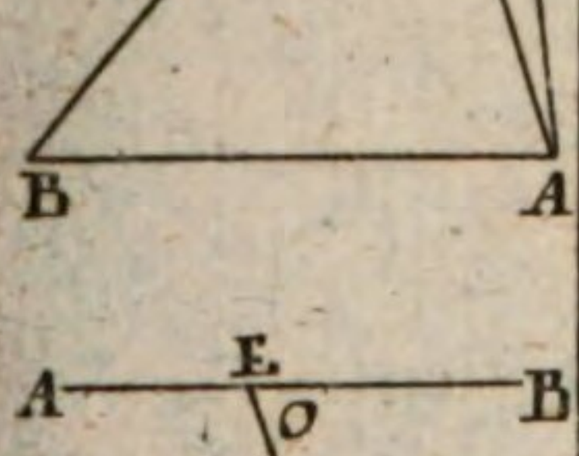

A
B
63
C
D

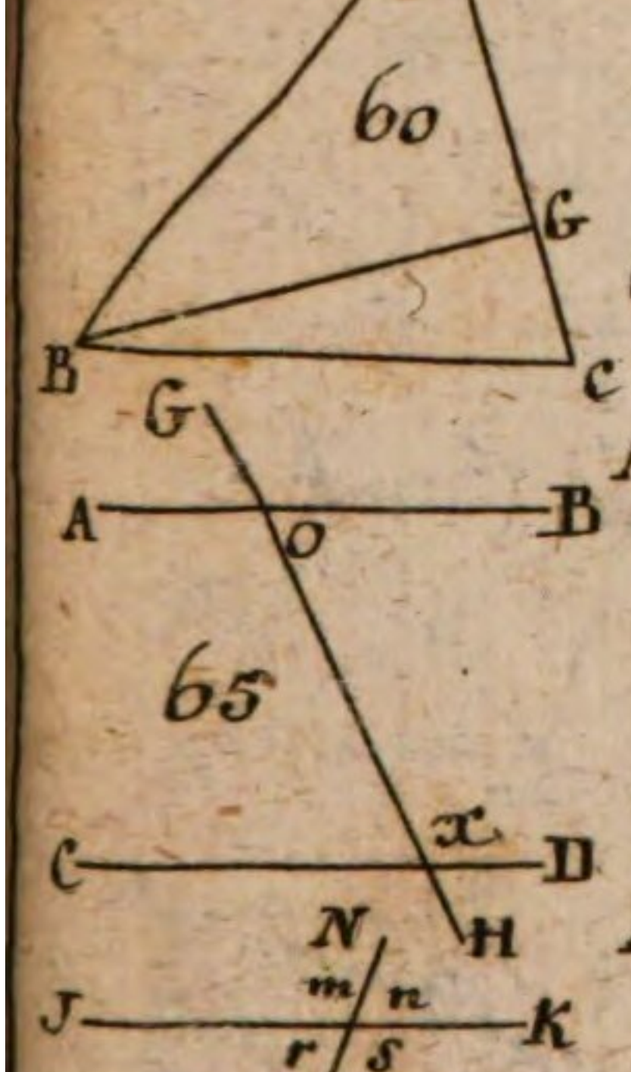

A
E.
O
B
64
C
x
F
D

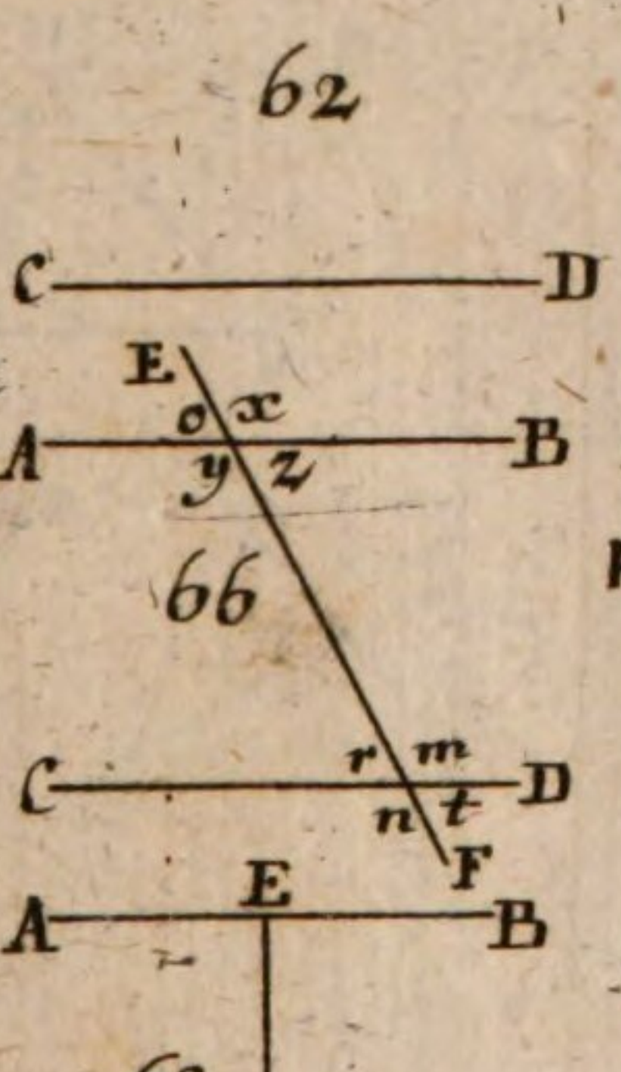
G
A
O
B
65
C
x
D
N
H

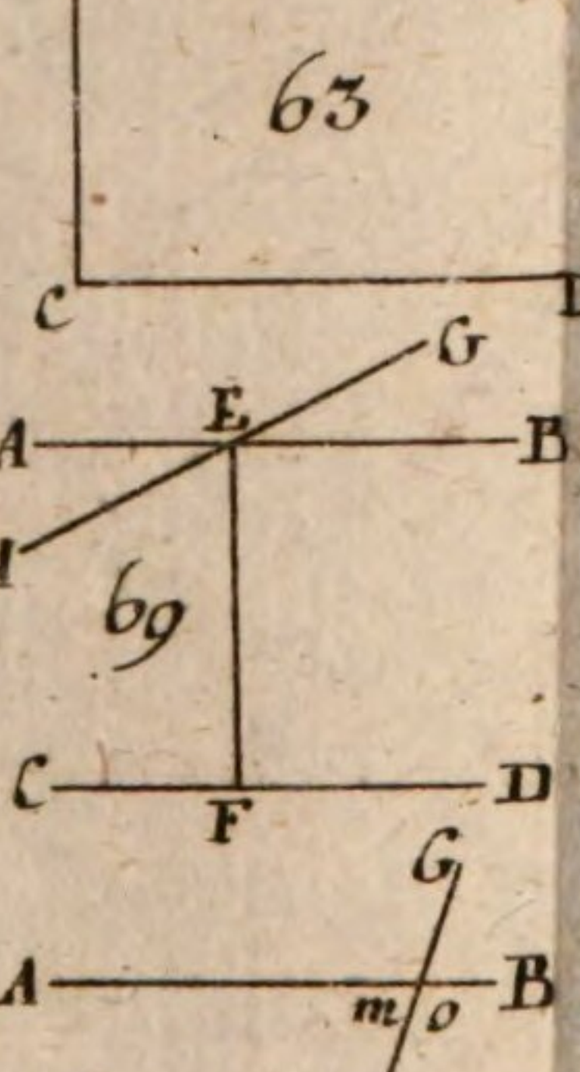
E
o
x
A
B
y
z
66
C
r
m
n
t
D
F

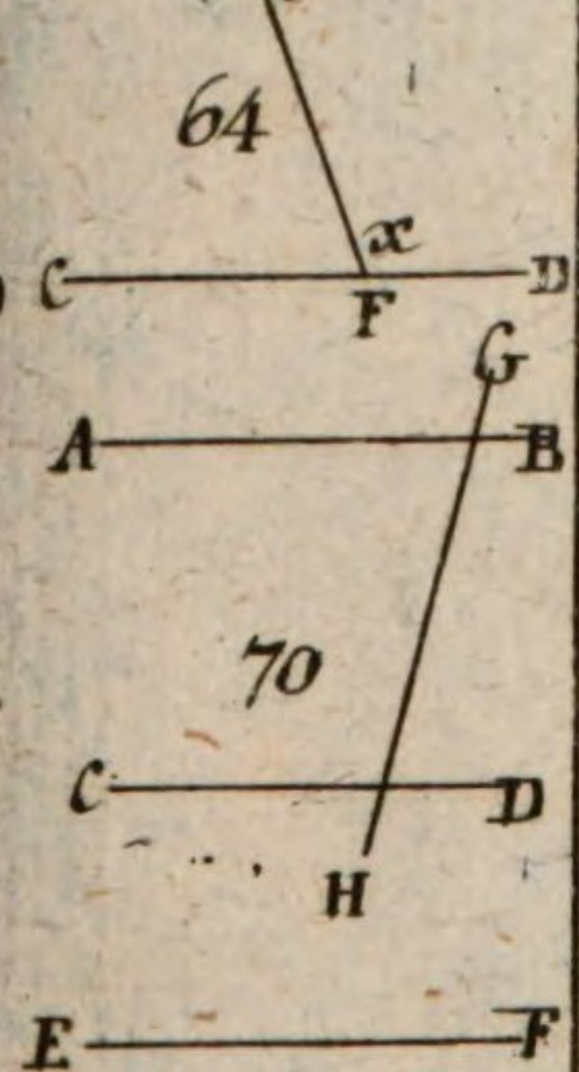
G
E
A
B
H
69
C
F
D


G
A
B
70
C
D
H


N
m
n
J
K
r
s
67
t
v
L
x
z
M
O

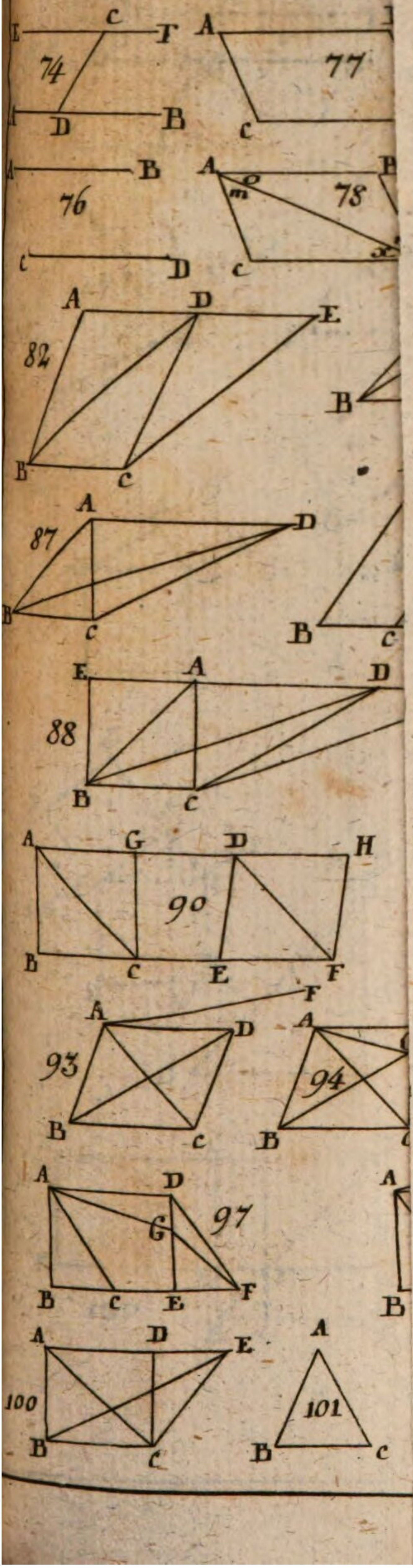

E
A
B
68
C
F
D

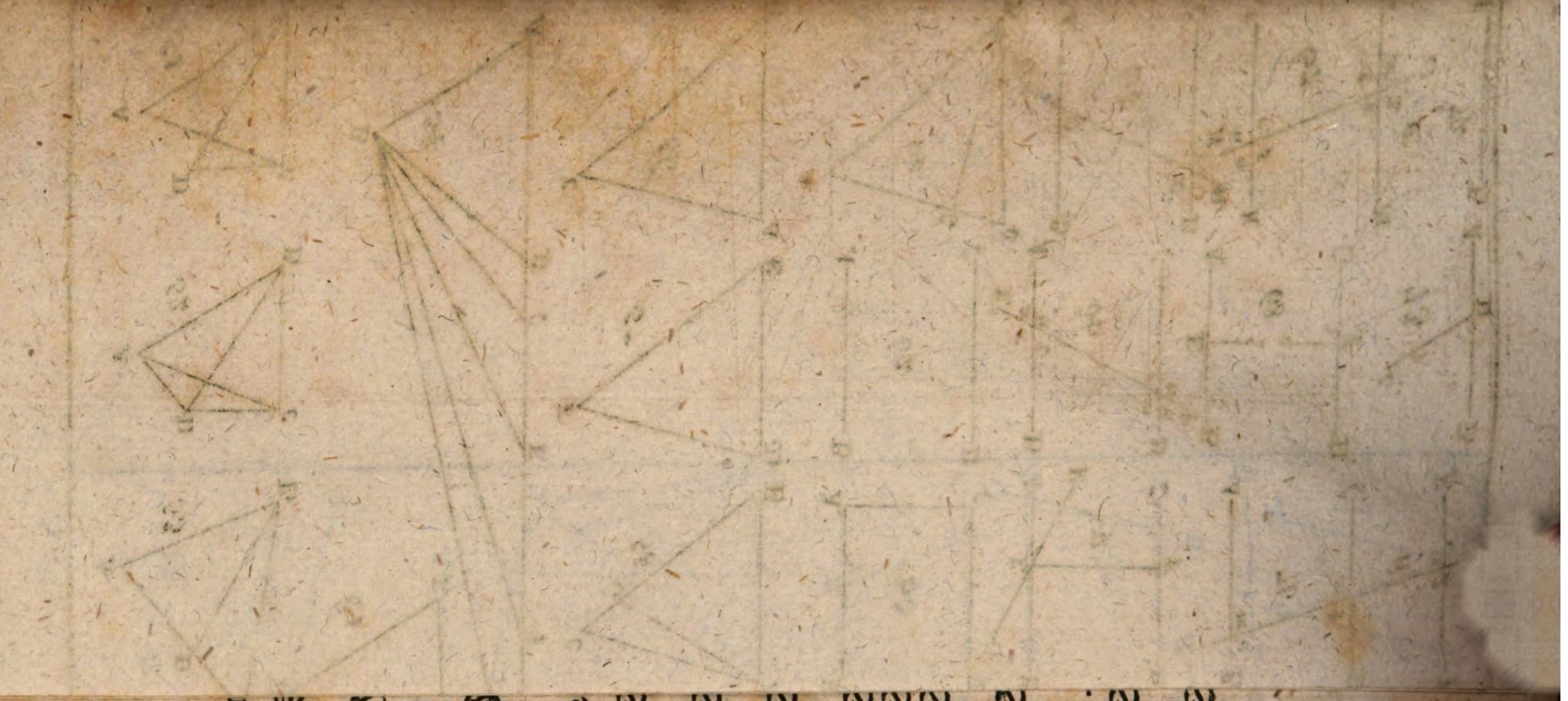

G
A
B
m
o
71
C
x
t
D
H
E
y
z
F
J

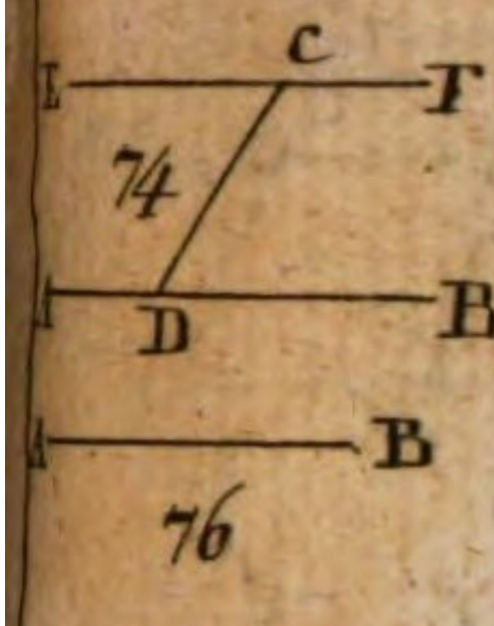

A
E
75
B
C
D

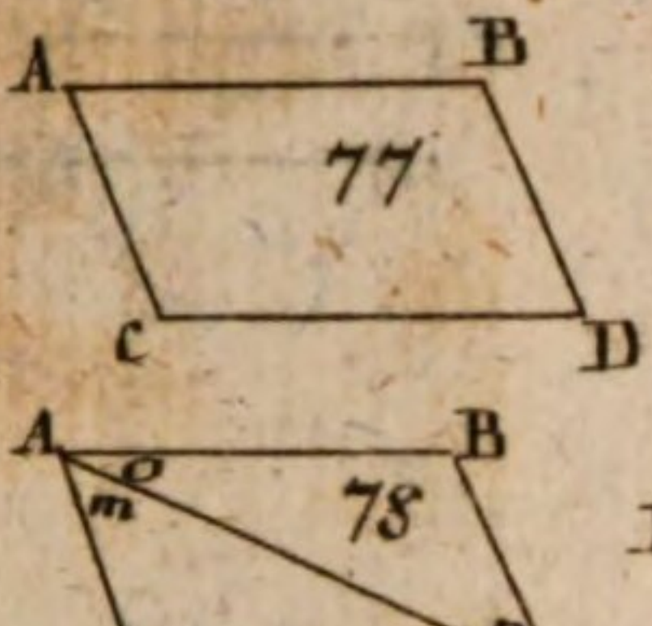
A
72
B

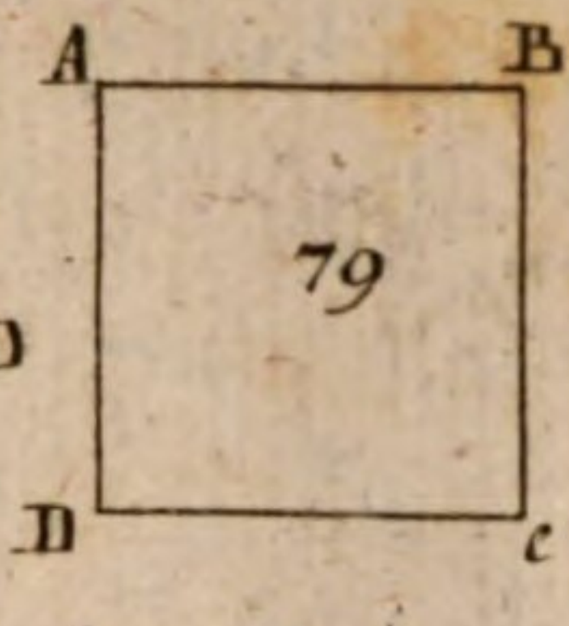
C
73
A
D
B

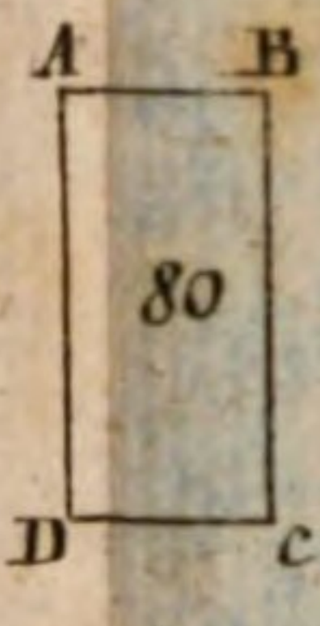

74
77
76
78
82
87
88
90
93
94
97
100
101

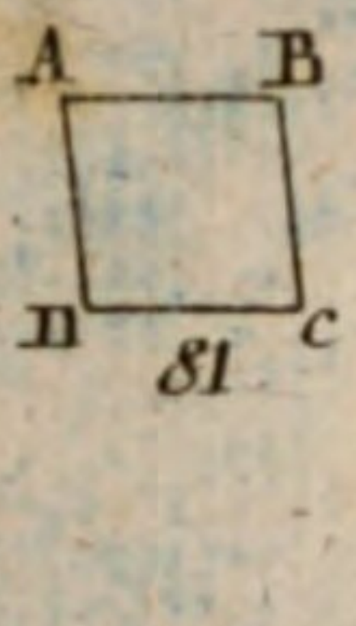


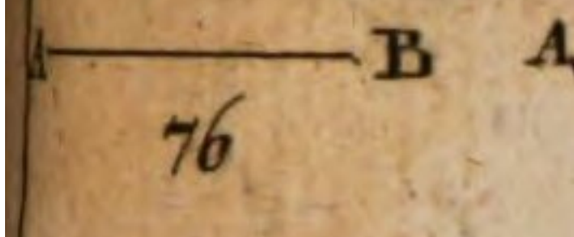

E
C
F
74
I
D
B


A
B
77
C
D


A
B
79
D
c


A
B
80
D
c


A
B
D
81
c

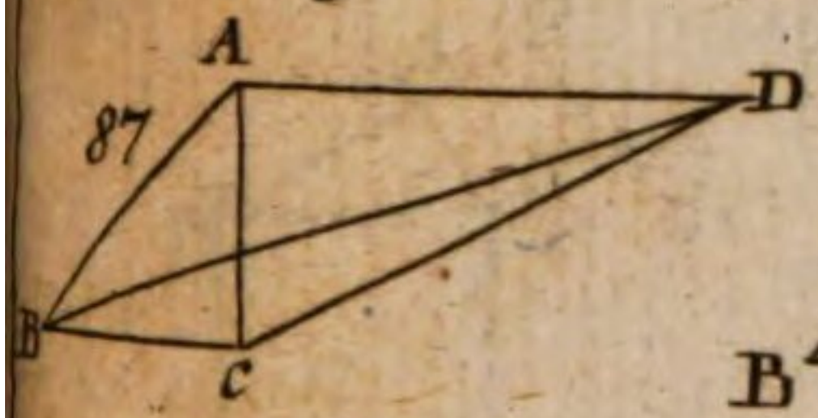

A
B
76
c
D

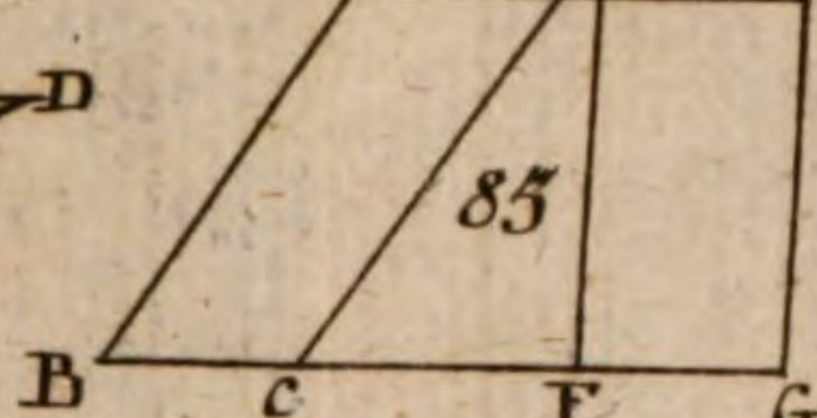
A
B
o
m
78
x
n
c
D

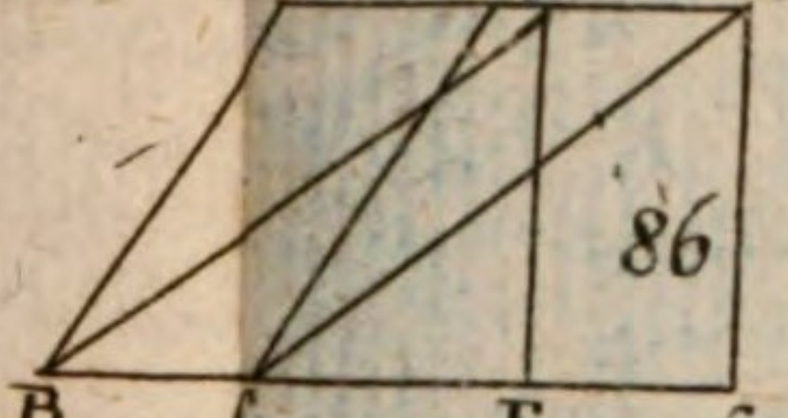
A
D
E
82
B
C

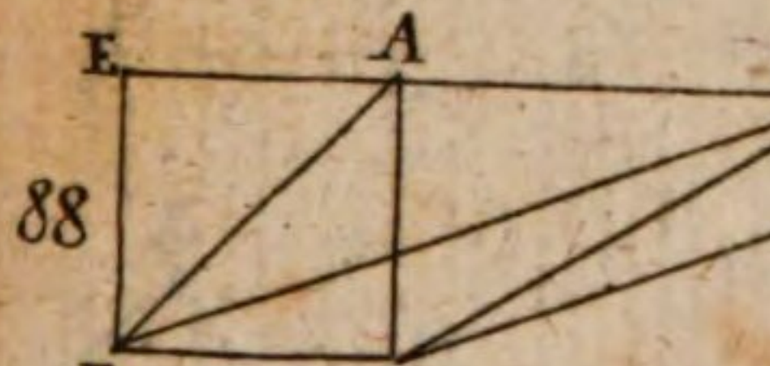
A
E
D
F
83
B
C

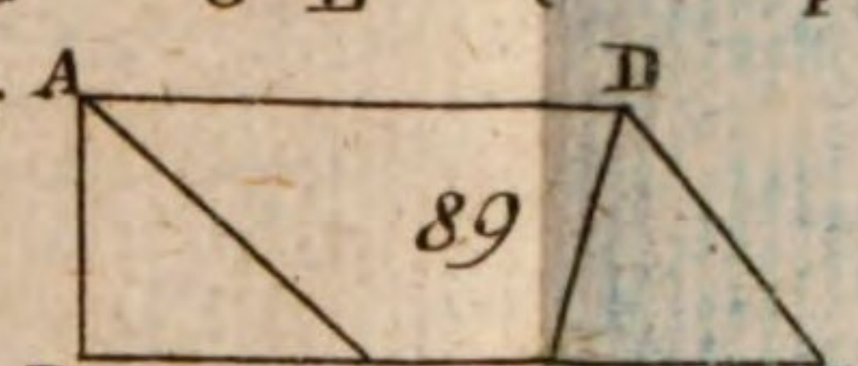
A
D
E
F
G
84
B
C

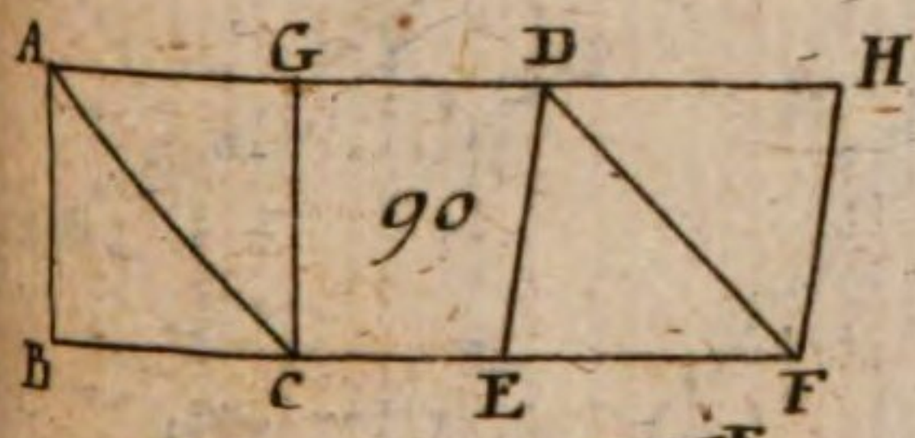

A
D
87
B
C

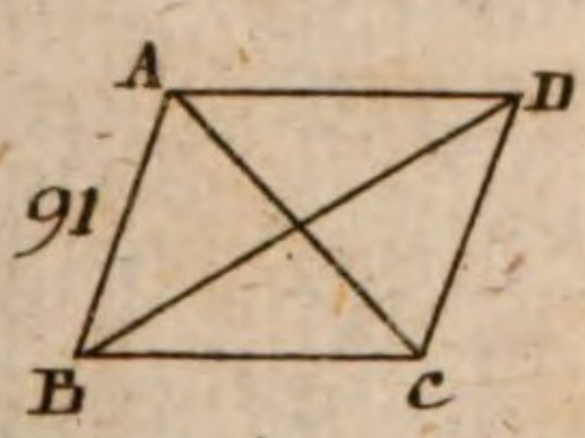

A
DE
H
85
B
C
F
G

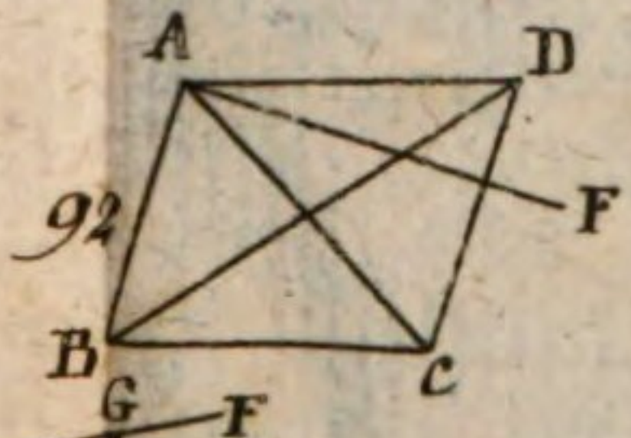

A
DE
H
86
B
C
F
G

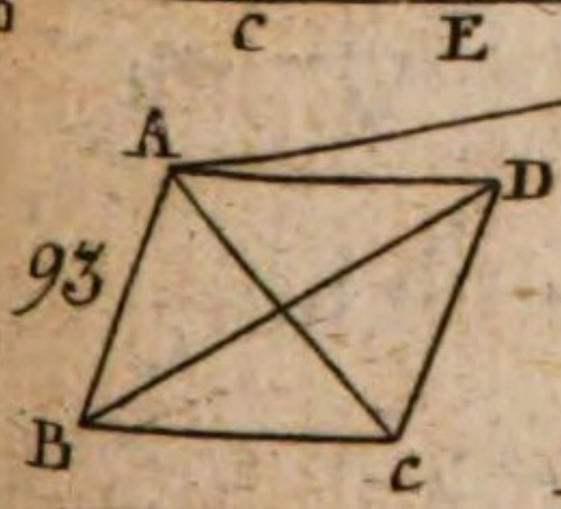

E
A
D
F
88
B
C

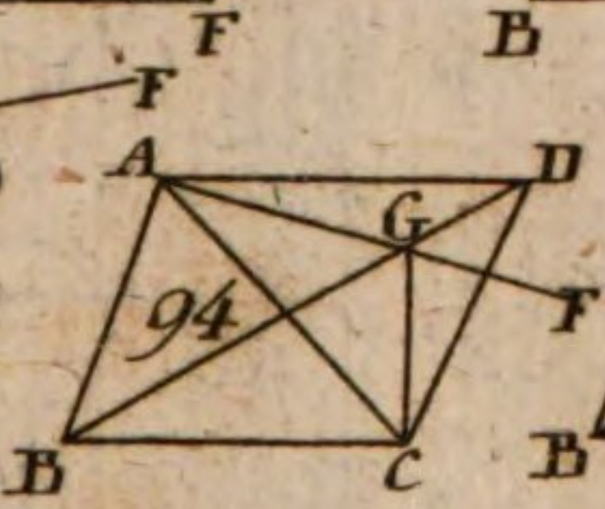

A
D
89
B
C
E
F

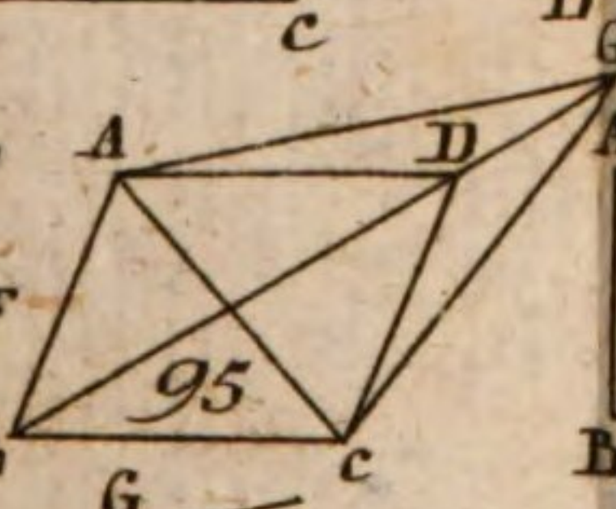

A
G
D
H
90
B
C
E
F

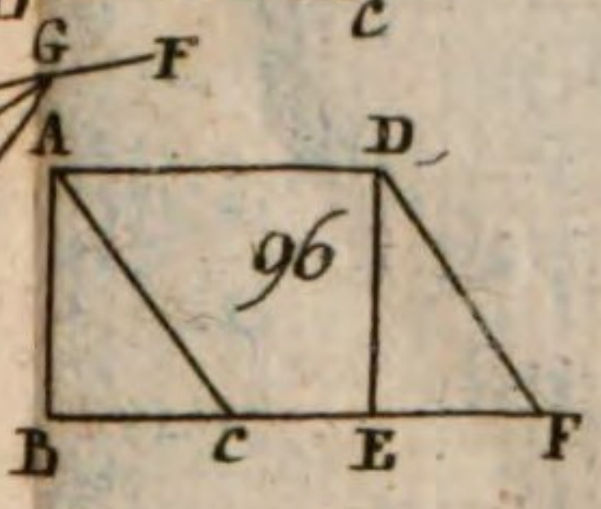

A
D
91
B
C

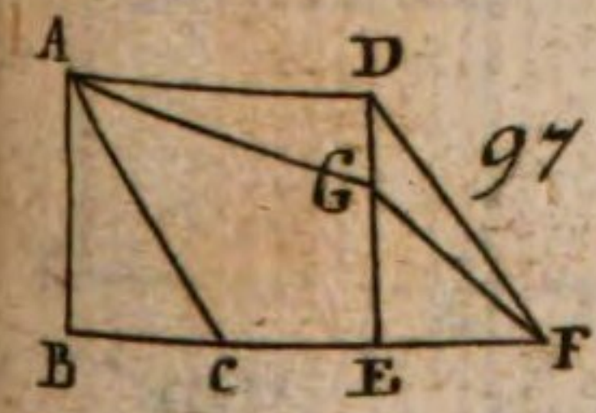

A
D
F
92
B
C

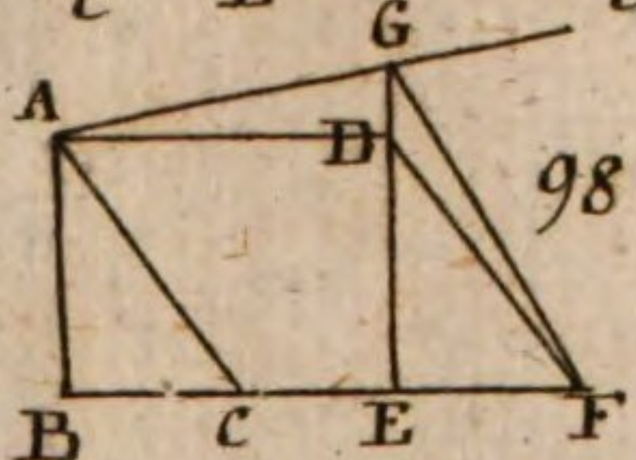

F
A
D
93
B
C

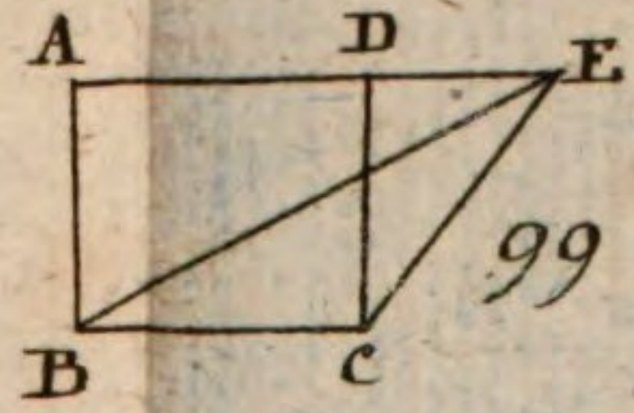

A
D
G
94
F
B
C


G
F
A
D
95
B
C

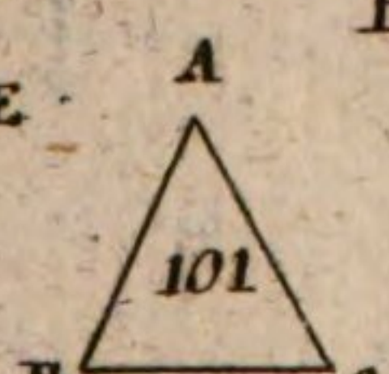

A
D
96
B
C
E
F

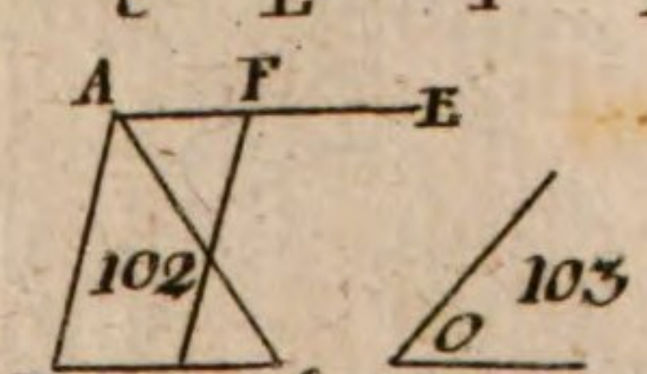

A
D
G
97
B
C
E
F


G
A
D
98
B
C
E
F

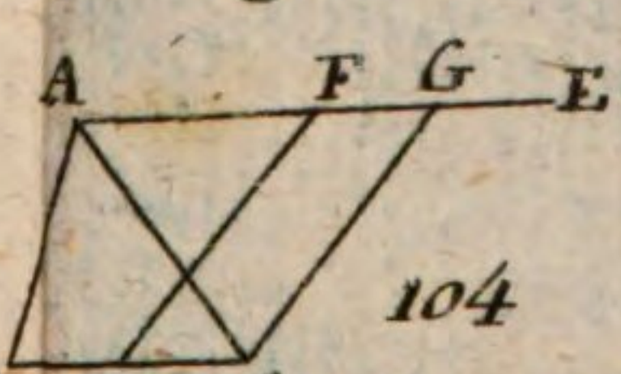

A
D
E
99
B
C

A
D
E
100
B
C


A
101
B
C

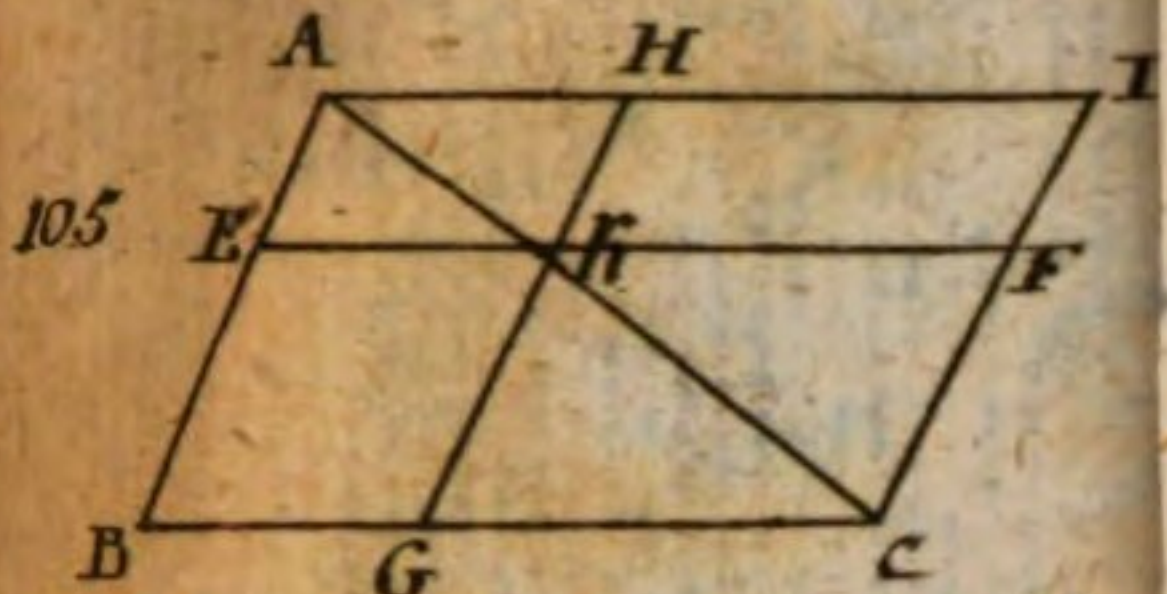

A
F
E
102
B
D
C

103
o

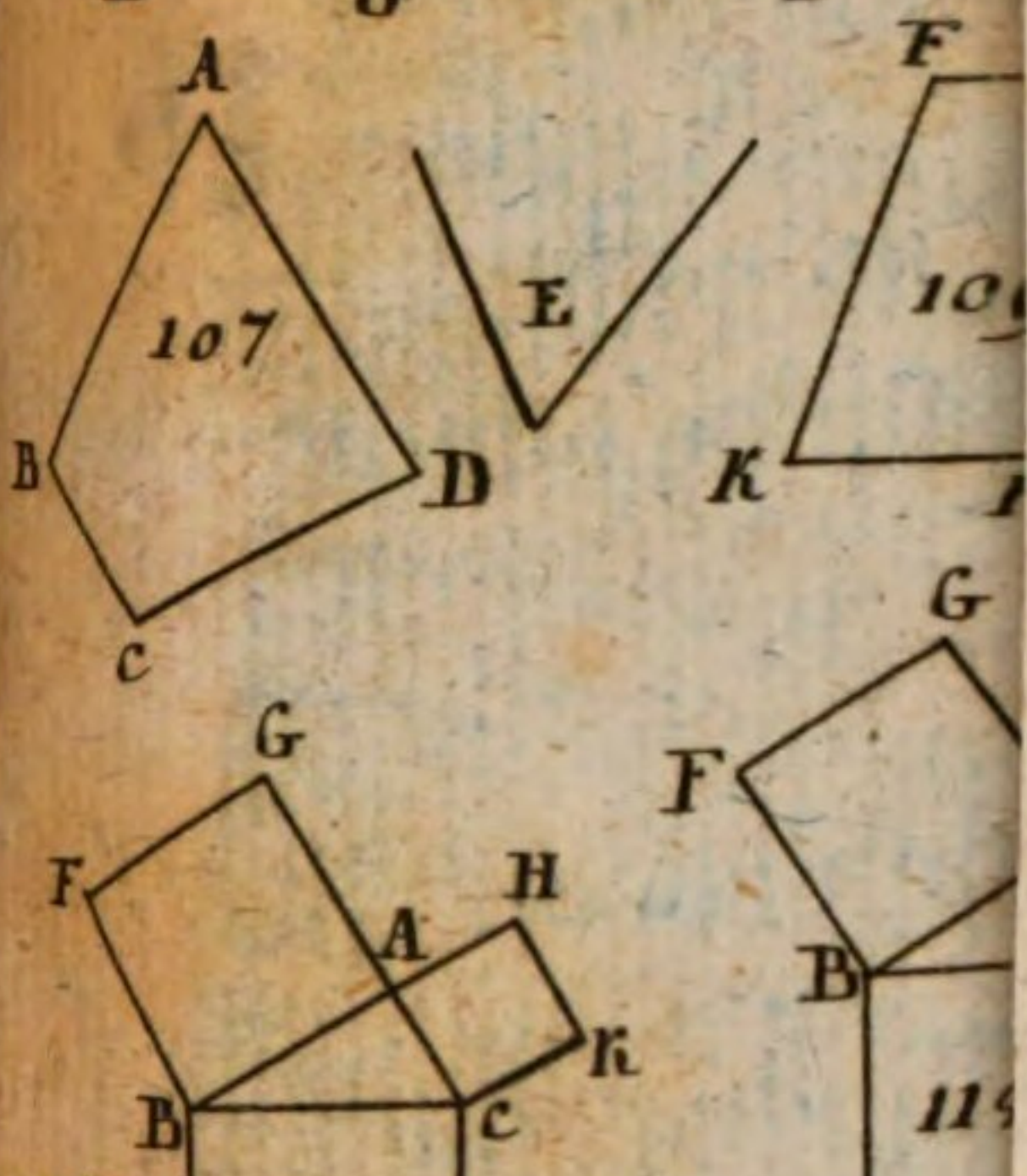

A
F
G
E
104
B
D
C

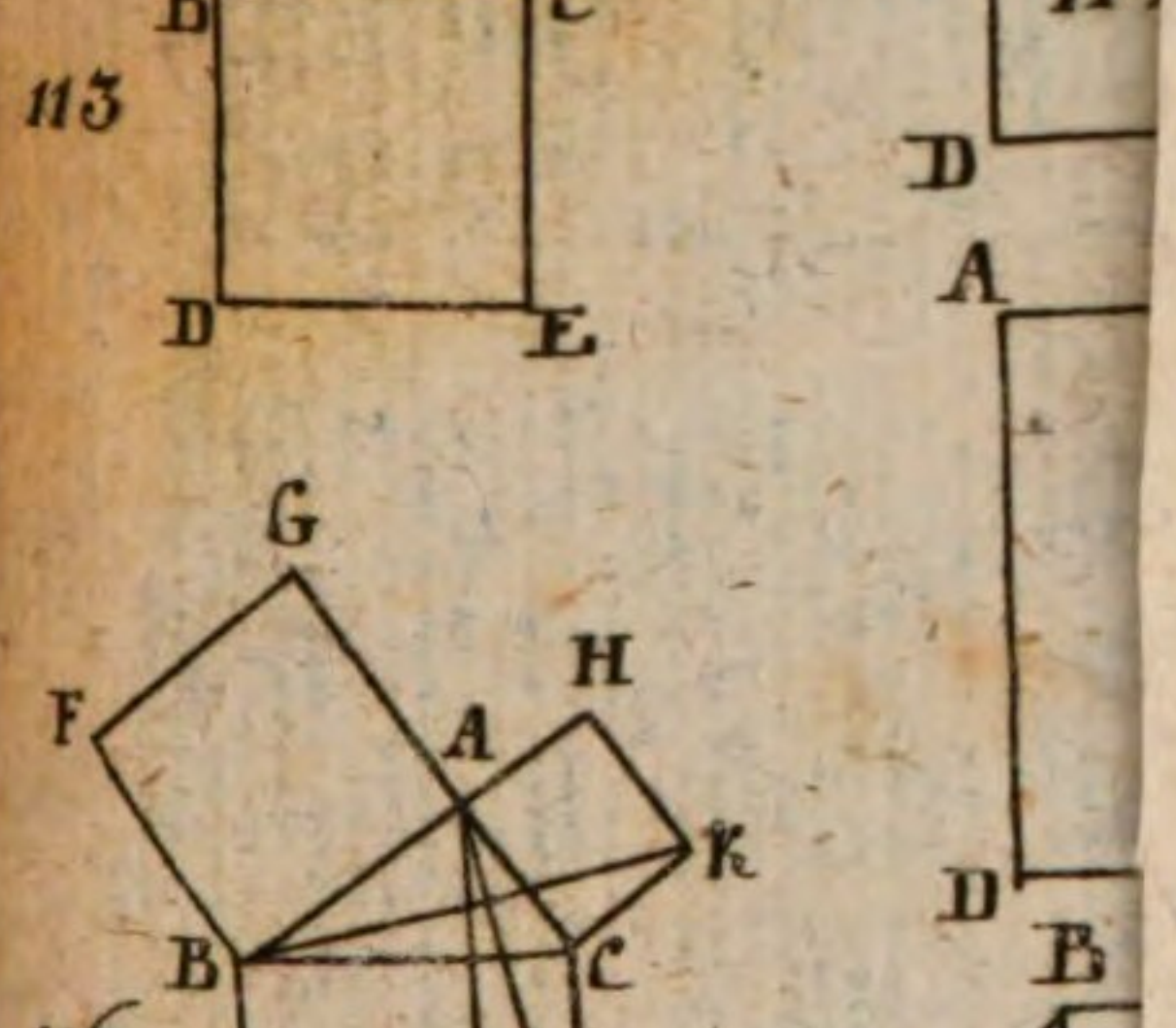
I

2



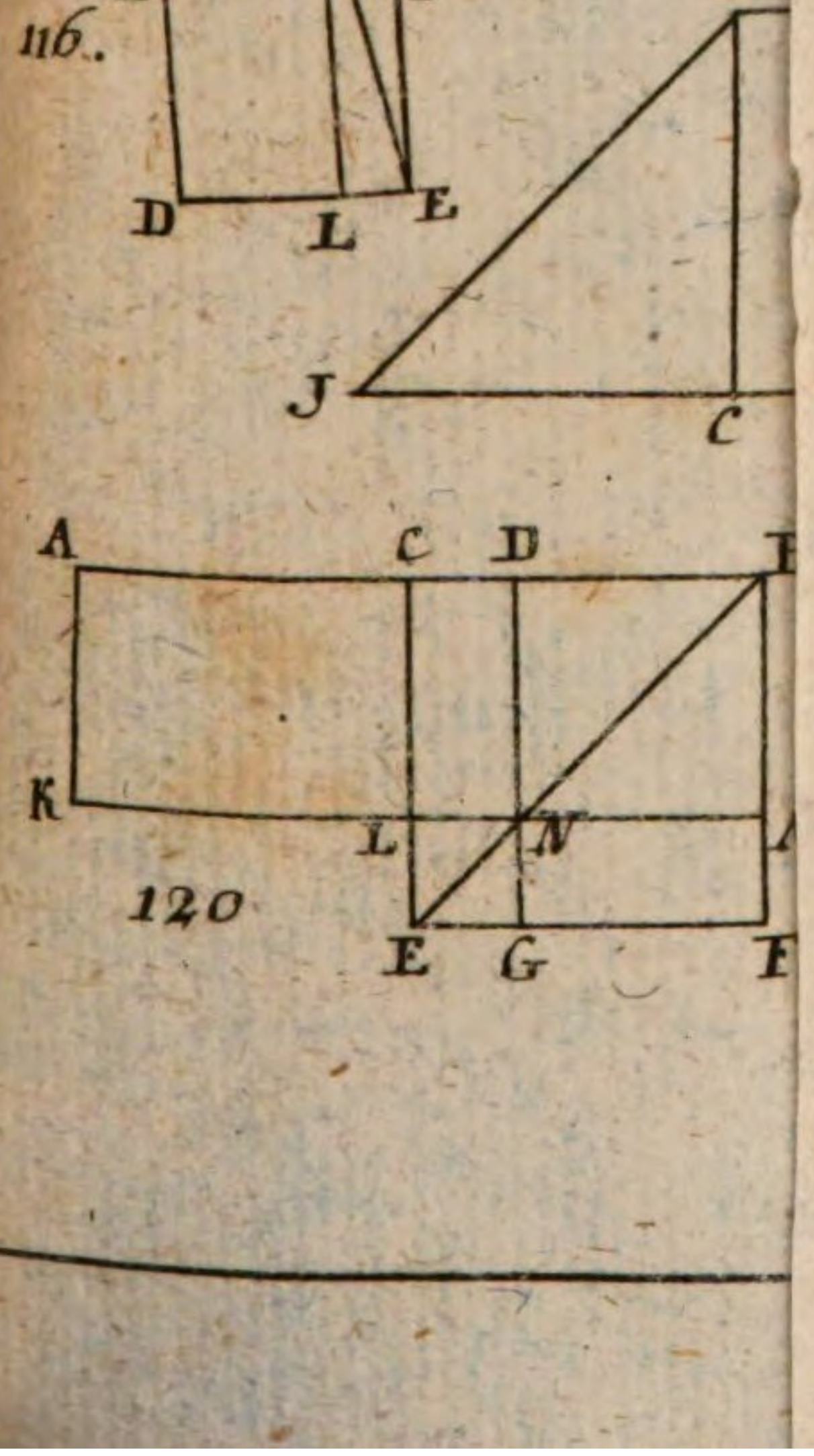
105



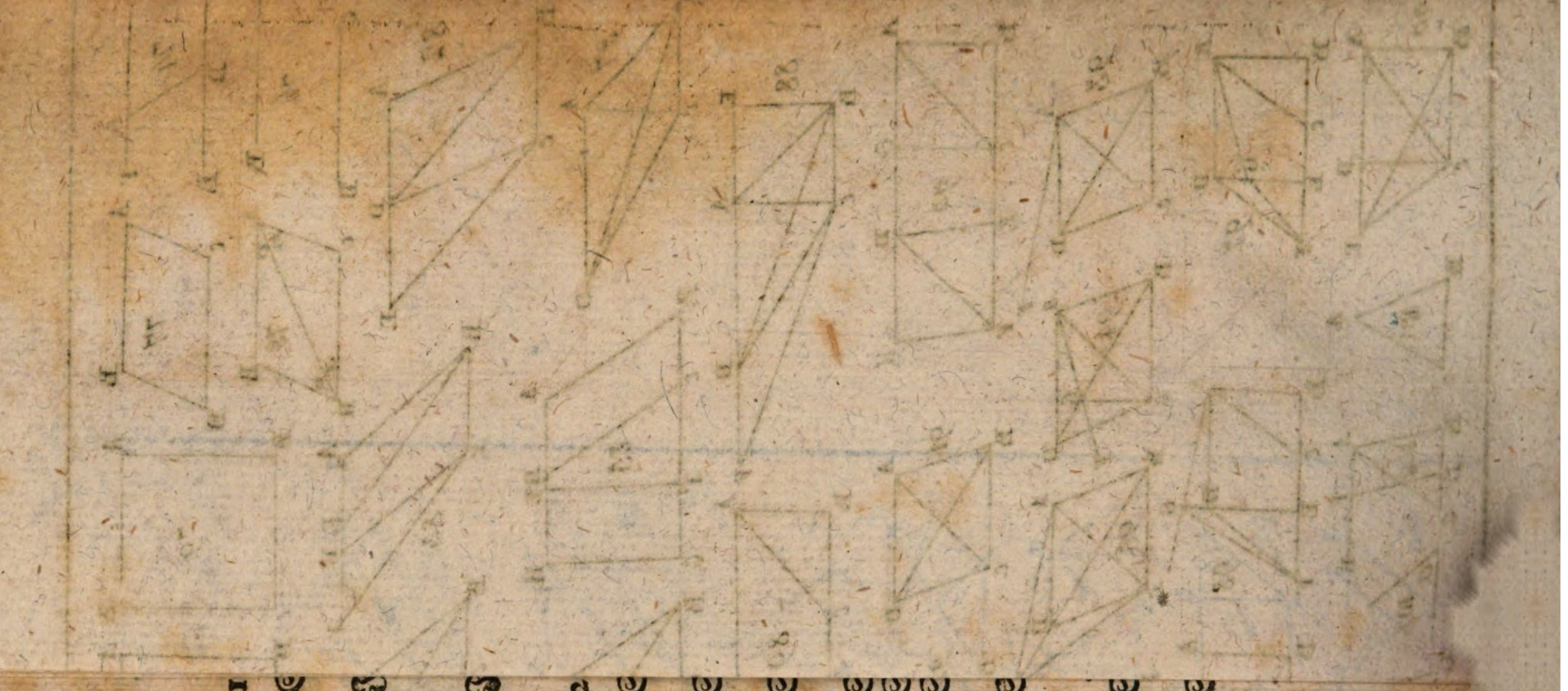


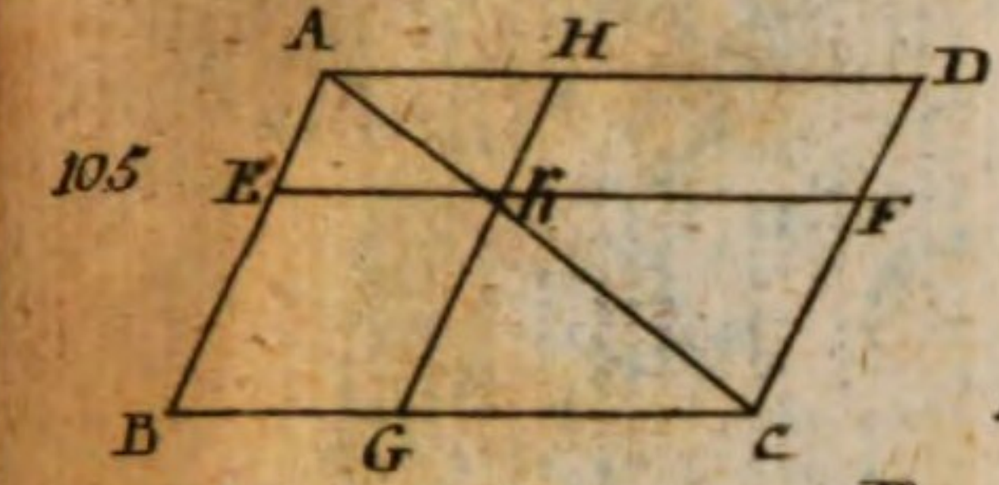
113

116.

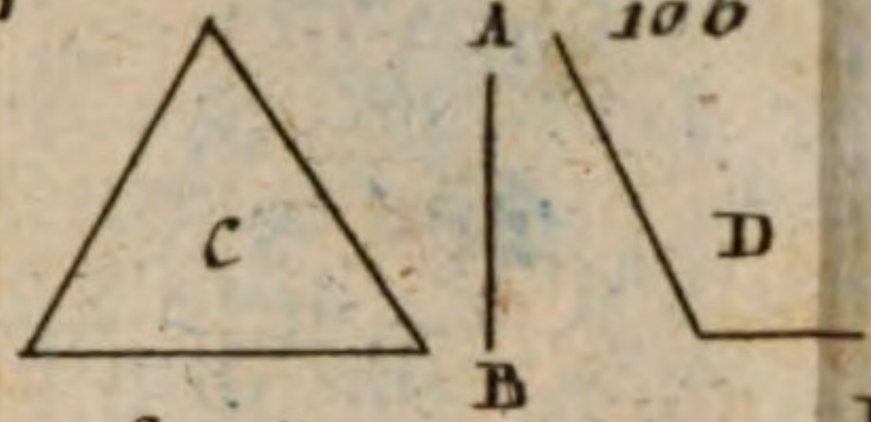


120

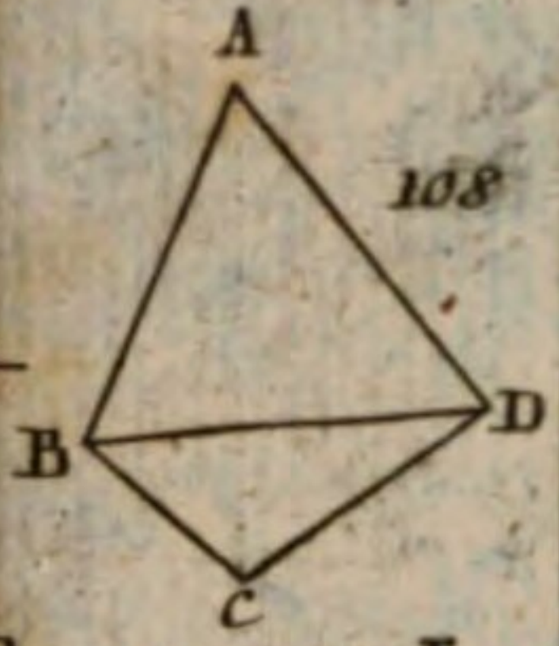




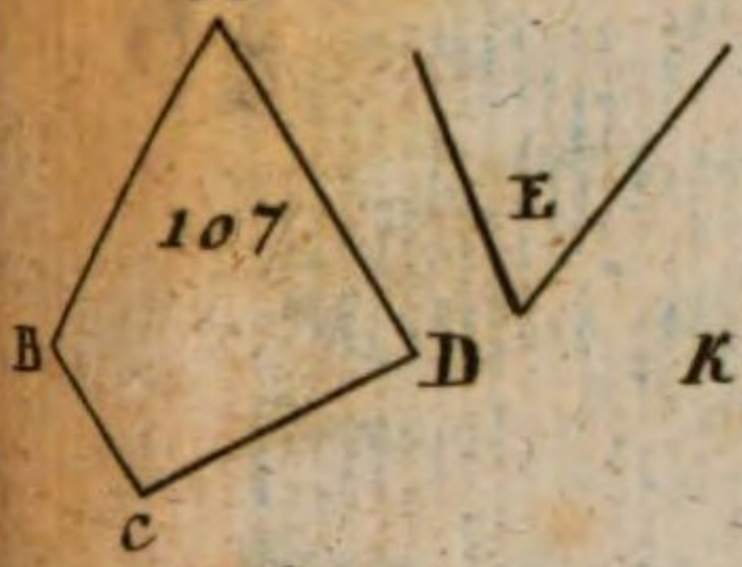
105



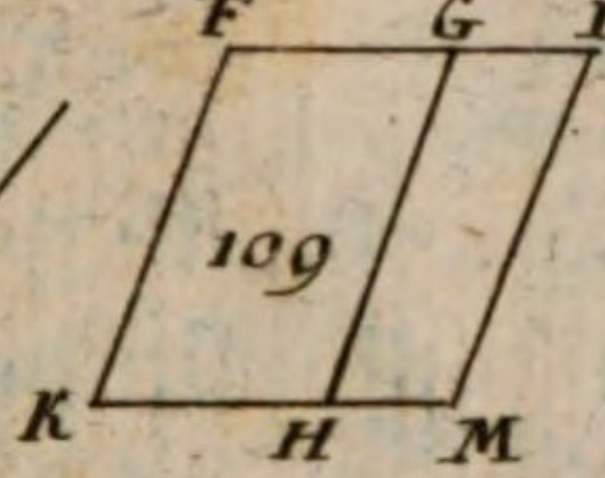
106



108

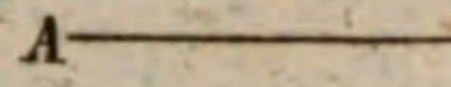


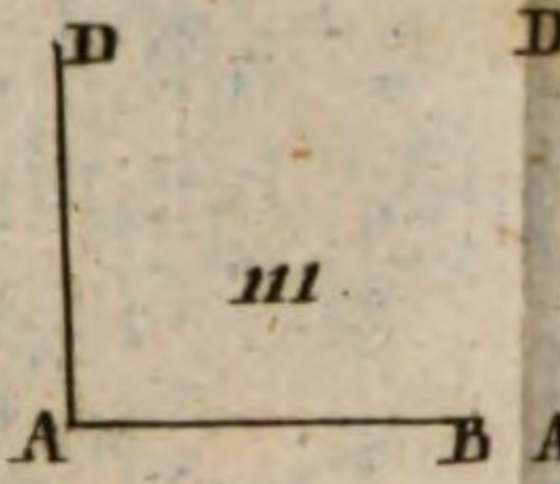
107



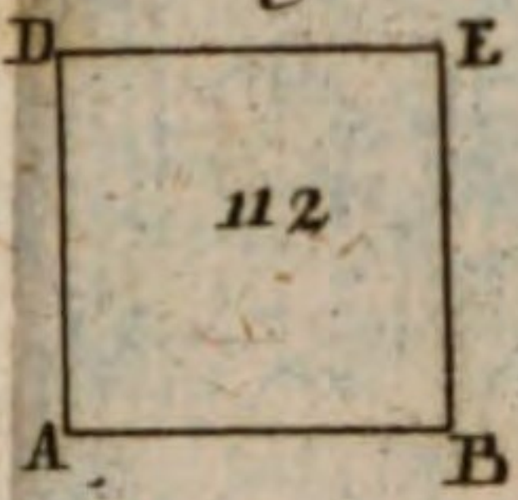
109

110

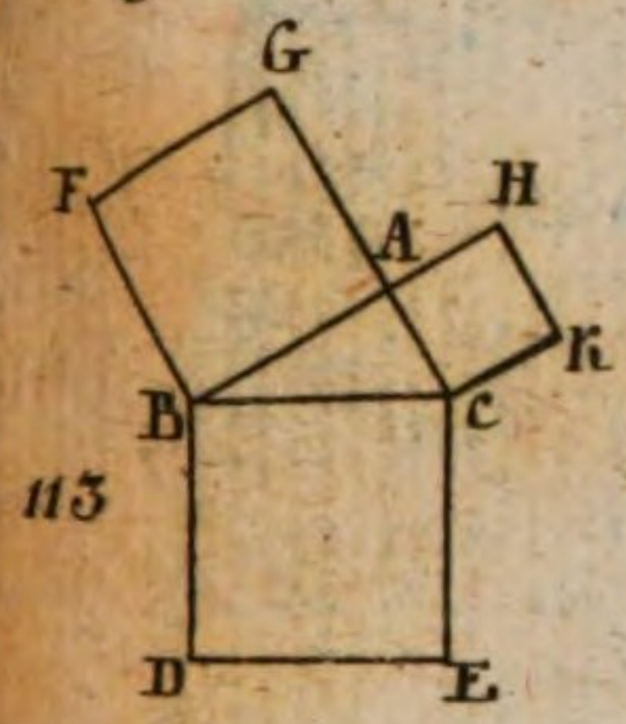




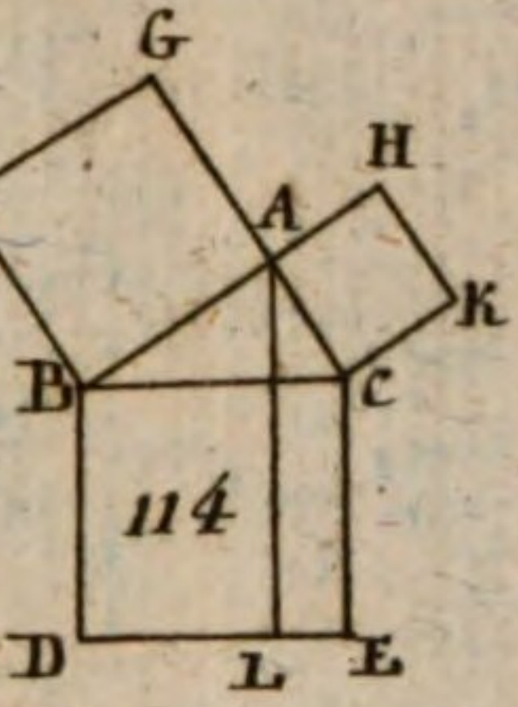
111



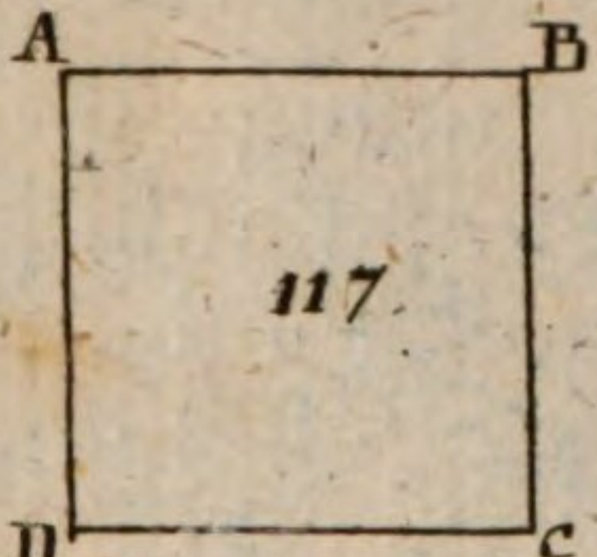
112



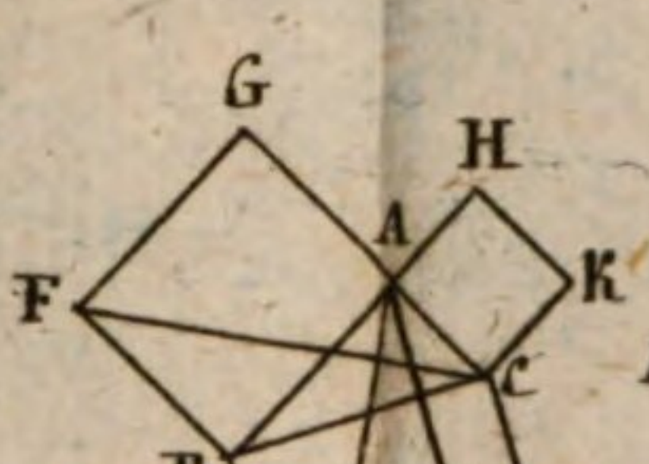
113



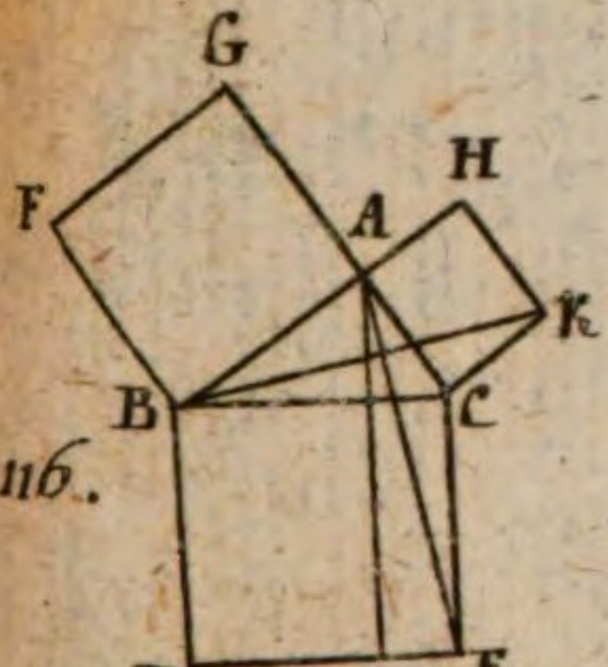
114



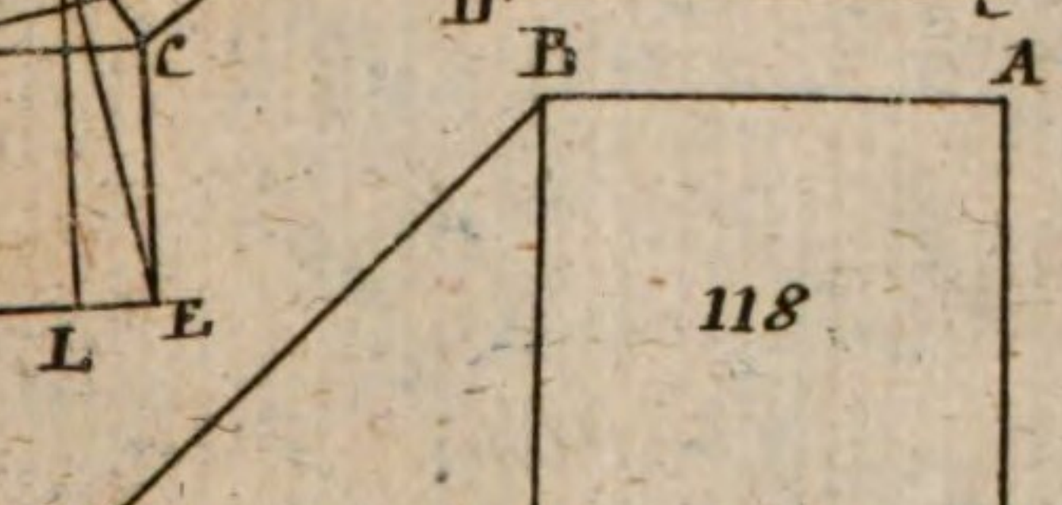
117



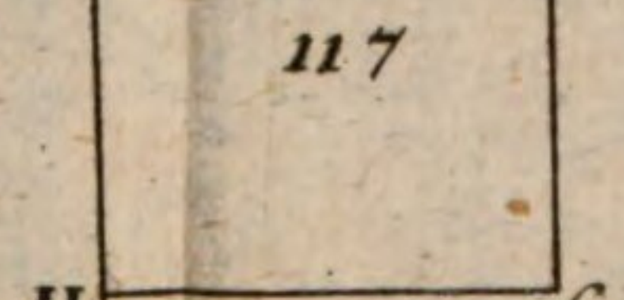
115



116.

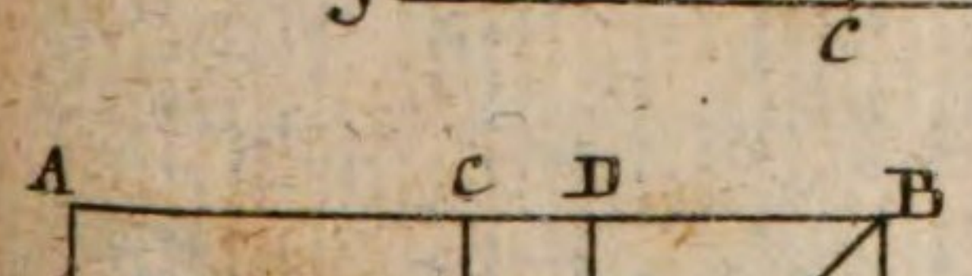


118

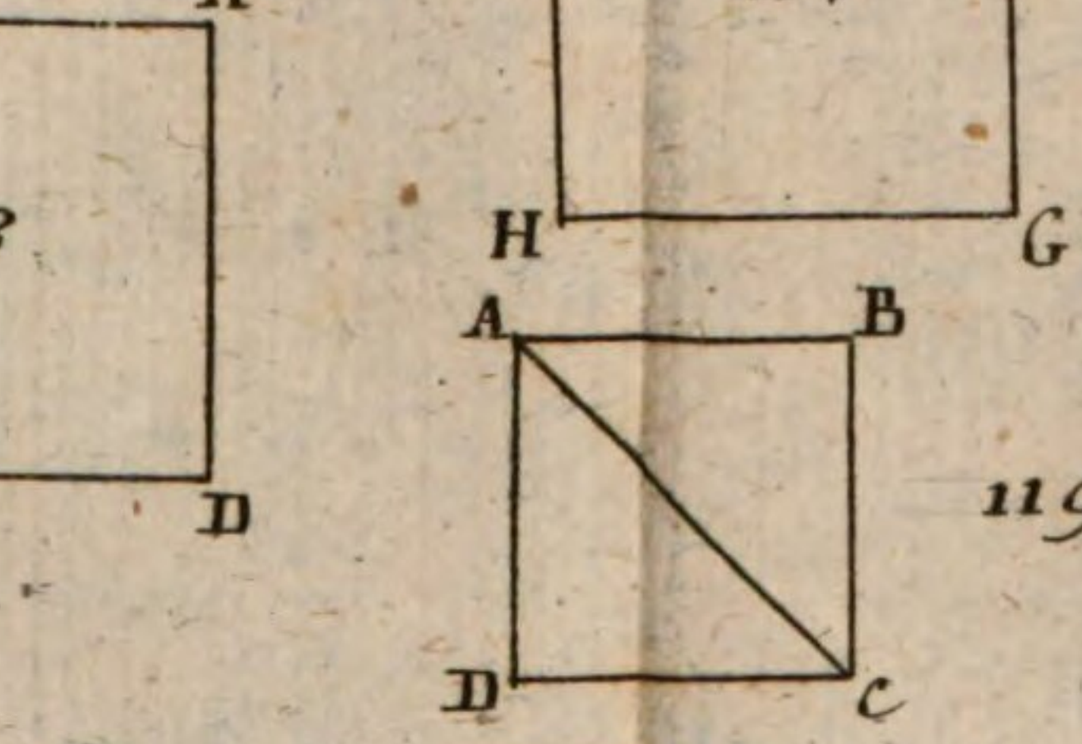


119

117



120



121

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann Andreas Christian,

Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie

Bd.: [2]

Berlin 1782

Math.p. 355 t-1/3,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082420-9
VD18 90034341